



Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Рыбаков

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЛЕГКИХ СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета

2011

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет

В.А. РЫБАКОВ

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЛЕГКИХ СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению
«Прикладная механика»*

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2010

УДК 69.04 (075.8)
ББК 22.251я73

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор физико-математических наук,
профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета
В.А. Пальмов;

Доктор технических наук, профессор
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета, академик Академии горных наук, академик Международной академии
экологии и безопасности человека и природы, академик Международной академии
безопасности инфраструктуры
В.А. Боровиков;

Кандидат архитектуры, заслуженный архитектор Российской Федерации, главный
архитектор ОАО «ЛенжилНИИпроект»
К.А. Шарлыгина

Рыбаков В. А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие / В.А. Рыбаков – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 207 с.

В пособии приводятся теоретические основы моделирования и расчета на прочность и устойчивость подобных конструкций, являющихся на сегодняшний день инновационными и, соответственно, испытывающие проблемы и пробелы в теоретической фундаментальной базе, в частности – необходимости использования Еврокода-3.

Главная особенность пособия – наличие конкретных примеров по расчету рассматриваемого типа конструкций.

Учебное пособие рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Прикладная механика».

Также пособие может быть использовано: для подготовки студентов, обучающихся по магистерским программам «Теория и практика организационно-технологических решений», «Организация и управление инвестиционно-строительными проектами», «Автоматизированное проектирование зданий и сооружений», «Инженерные системы зданий и сооружений» направления «Строительство»; аспирантами, молодыми преподавателями и специалистами, изучающими, либо стремящимися расширить свои знания в области стальных конструкций и строительной механики.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентноспособности национальной экономики».

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Рыбаков В.А. , 2011

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2011

ISBN 978-5-7422-3358-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. Теоретические основы расчета легких стальных тонкостенных конструкций.....	23
1.1. Классификация элементов расчетных моделей в строительной механике. Понятие тонкостенного стержня	23
1.2. Истоки развития теории расчета стальных тонкостенных конструкций	27
1.3. Основы технической теории расчета тонкостенных стержней В.З. Власова.....	33
1.3.1. Стесненное кручение тонкостенного стержня открытого профиля	33
1.3.2. Секториальная площадь	36
1.3.3. Геометрические характеристики поперечного сечения	37
1.3.4. Секториальные координаты и секториальные геометрические характеристики в швеллере	42
1.3.5. Система дифференциальных уравнений равновесия стержня	44
1.3.6. Общий случай нагружения тонкостенного стержня. Бимомент. Нормальные напряжения.....	46
1.3.7. Касательные напряжения в сечении	50
1.3.8. Стержень под действием поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба при различных граничных условиях	53
1.4. Развитие теории расчета тонкостенных стержней в научно-исследовательской работе в XX-XXI веках	65
1.5. Тонкостенные стержни открытого профиля в методе конечных элементов	70
1.5.1. Классификация методов исследования. Основные положения и известные в практике варианты конечноэлементного анализа тонкостенных стержней открытого профиля	70
1.5.2. Теоретические основы метода конечных элементов в классической постановке	73
1.5.3. Метод конечных элементов с использованием тонкостенных конечных элементов	89
1.5.4. Бистержневая модель тонкостенных конструкций.....	102
1.5.5. Экстраполяционные методы оценки точности метода конечных элементов	108
1.6. Требования современных строительных норм, правил и рекомендаций	115
1.6.1. Требования действующих строительных норм.....	116

1.6.2. Расчет тонкостенных конструкций по методике Э.Л. Айрумяна	117
1.7. Устойчивость элементов тонкостенных профилей	123
1.7.1. Понятие устойчивости равновесия упругой системы. Критическая сила.....	123
1.7.2. Особенности явления потери устойчивости тонкостенных стержней.....	131
1.7.3. Общая устойчивость тонкостенных стержней в условиях поперечного изгиба	136
1.7.4. Местная потеря устойчивости. Положения расчета Еврокода-3	144
1.7.5. Конструктивные мероприятия по предотвращению потери устойчивости	149
1.8. Перфорированные профили	150
1.8.1. Виды термопрофилей и их назначение	150
1.8.2. Учет влияния просечек в строительных нормах	151
1.8.3. Учет влияния просечек в Еврокоде-3	152
1.8.3. Моделирование просечек в виде локального уменьшения толщины профиля.....	153
1.9. Алгоритм расчета стальных тонкостенных поперечно изгибаемых просечно-перфорированных швеллеровых балок по несущей способности	157
2. Исследование влияния депланации на несущую способность тонкостенного профиля	163
2.1. Описание модели исследования.....	163
2.1.1. Описание исходных и искомых параметров модели	163
2.1.2. Основные физические гипотезы, лежащие в основе модели исследования.....	164
2.2. Расчет аналитическими и полуаналитическими методами	166
2.2.1. Определение ключевых геометрических характеристик .. сечения	166
2.2.2. Балка, загруженная равномерной нагрузкой.....	169
2.2.3. Балка, загруженная одной сосредоточенной нагрузкой	178
2.2.4. Балка, загруженная двумя сосредоточенными нагрузками	180
2.2.5. Анализ общей устойчивости балки по С.П. Тимошенко при различных нагружениях	182
2.2.6. Анализ местной устойчивости балки при различных загружениях	183
2.3. Расчет модели численными методами	186
2.3.1. Выбор метода исследования и способа задания модели	186
2.3.2. Анализ результатов, полученных численным методом.....	186

2.4. Сопоставление полученных различными способами результатов	191
Приложение 1. Некоторые сведения об узловых соединениях и методах их расчета	195
Библиографический список	204

ВВЕДЕНИЕ



В последние годы в России динамично развивается металлургия и наблюдается широкое применение металлоконструкций в современном строительстве. Металлические конструкции демонстрируют себя как универсальные, прочные, но легкие, и, соответственно, быстровозводимые, чему строительные компании придают огромное значение. В целях снижения сроков строительства, строительные компании стараются минимизировать объем «мокрых»¹ работ и переходят на «металл».

В настоящее время наиболее эффективной технологией строительства быстровозводимых сооружений является использование каркасной системы из легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК), утеплителя, облицовочных листов и пароизоляционных пленок, которая завоевывает в нашей стране все новых и новых поклонников и активно внедряется на строительном рынке

Однако столь важное свойство, как легкость, может заметно сказаться на несущей способности конструкции. Поэтому легкие стальные тонкостенные конструкции (далее ЛСТК) перед их внедрением в строительство должны быть подвергнуты тщательному анализу по несущей способности. Особенно это актуально для незамкнутых тонкостенных профилей, таких как двутавр, зетовый, уголкового и, особенно, швеллеровый профили.

¹ - Термин «мокрый» в 3-ем значении толкового словаря русского языка Ожегова С.И и Шведовой Н.Ю. [17] означает «относящийся к пребыванию в водной среде (спец.) – *Мокрые процессы*». В строительной отрасли этот термин, как правило, применяется как характеристика процессов и работ, связанных с твердением цементного, глиняного и др. вяжущих веществ вследствие частичного испарения и частичной кристаллизации молекул воды.

Ввиду того, что одной из областей применения ЛСТК является малоэтажное жилищное строительство, подобные конструкции могут быть использованы как экономичный вариант реализации национальной программы «Доступное и комфортное жилье», несомненна значимость проблемы для экономики страны в целом.

Несмотря на столь широкую распространенность подобных конструкций в России, на сегодняшний день имеются существенные недостатки в нормативной и методической базах по расчету ЛСТК.

И, безусловно, для решения этих проблем необходимо обращаться к фундаментальной науке – строительной механике, как впрочем, всегда и поступало человечество, пытаясь найти в науке обоснованные ответы на непонятные жизненные вопросы.

Строительная механика является первичной строительной наукой, на которой базируется вся строительная отрасль. В нашем случае – это строительная механика плоских стержневых систем.

Первые попытки решения задачи строительной механики об изгибе стержней были произведены в XV веке Леонардо да Винчи (1452-1519), исследовавшего данное явление и предположившего, что прочность балок, опертых обоими концами, изменяется в обратном отношении к длине и в прямом отношении к ширине.

В дальнейшем, на протяжении XVI-XIX веков теорией изгиба стержней занимались Галилео Галилей (1564-1642), Эдм Мариотт (1620-1684), Яков Бернулли (1654-1705), Леонард Эйлер (1707-1783), Антуан Паран (1666-1716), Луи Мари Анри Навье (1666-1716), Жан Виктор Понселе (1788-1867), Софи Жермен (1776-1831), Симеон Дени Пуассон (1781-1840), Барре де Сен-Венан (1796-1886), Д.И. Журавский (1821-1891), Отто Христиан Мор (1835-1918), совершенствуя эту теорию, учитывая все больше и больше факторов и неуклонно своими исследованиями стремясь к точному результату.

Однако все они исследовали стержни, толщина стенок или контура которых сопоставима с размерами поперечного сечения, т. е. не являющиеся тонкостенными.

В 1855 г. Сен-Венаном разработана теория кручения призматического стержня. Было установлено, что для некруглого стержня при наличии

связей, мешающих искажению сечения, возникает изгибное или стесненное кручение, при котором в стержне возникают дополнительные нормальные напряжения. Впоследствии подобное явление было замечено в 1909 г. Бахом.

Огромный вклад в развитие теории тонкостенных стержней внес В.З. Власов, считающийся, по сути, основоположником данной теории. Немалый вклад в развитие теории устойчивости тонкостенных стержней внес С.П. Тимошенко, работавший в то время в Санкт-Петербурге и неоднократно публиковавший свои результаты в изданиях Санкт-Петербургского политехнического института.

Теорию В.З. Власова развивали и продолжили на протяжении XX века П.А. Лукаш, Н.А. Кузьмин, И.Е. Милейковский, Е.А. Бейлин, В.Г. Александров, А.П. Анучкин, Д.В. Бычков, А.К. Мроцинский, Г.Ю. Джанелидзе, Я.Г. Пановко, Б.Н. Горбунов, А.И. Стрельбицкая, А.А. Уманский, В.А. Постнов, И.Я. Хархурим, Г.И. Белый, Н.Г. Сотников, Н.Н. Родиков, С.Н. Пичугин, С.Н. Сергеев, П.А. Пяткин. Изучению вопросов устойчивости пластин посвящены исследования Б.М. Броуде, Е.В. Борисова, Ф. Блейха, Я. Брудки, А.С. Вольмира, И.Б. Ефимова, Э. Стоуэла и других ученых. Проблеме учета просечек в тонкостенных профилях также посвящена работа Е.Н. Поповой, инженера Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

На сегодняшний день в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете дисциплина «Строительная механика изучается студентами на 3-4 курсах бакалаврской и инженерной подготовки, в программу дисциплины входит изучение «азов» этой фундаментальной науки, ее ключевых основ, - линейной строительной механики плоских стержневых систем.

В рамках же магистерской подготовки студентам дается углубленное изучение строительной механики как основной строительной науки; в частности – основ строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций, которым и посвящено данное пособие.

И цель у настоящего пособия двоякая: прикладная – дать студентам представление о ЛСТК как особом виде металлических конструкций и методиках их расчета; фундаментальная – на конкретном примере углубить-

ся в математический аппарат строительной механики, осознать роль математики в современной науке.

Введение в технологию строительства

Основным элементом ЛСТК являются холоднокатаный термопрофиль и легкие балки из тонкого оцинкованного листа, которые могут быть использованы как для сборки цельного каркаса здания, так и для монтажа отдельных элементов:

- наружных и внутренних стен, перегородок;
- междуэтажных перекрытий;
- стропильных конструкций мансард, крыш и других сооружений.

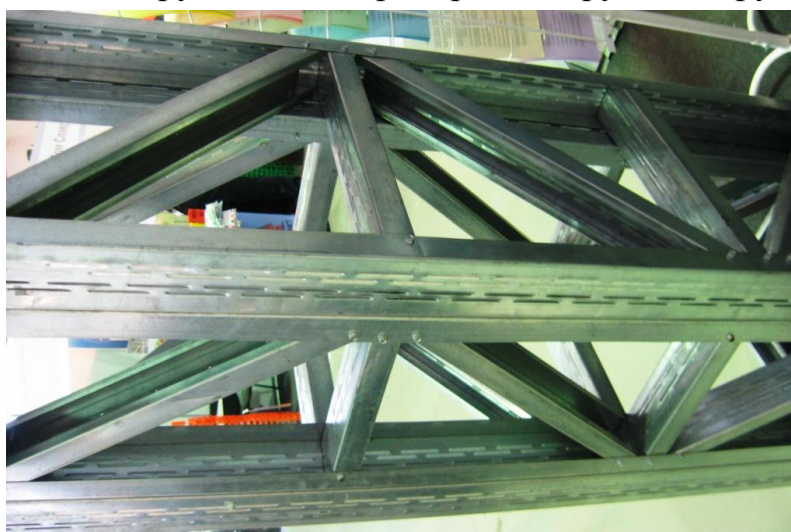


Рис. 1В. Ферма на основе ЛСТК (из профилей с перфорацией)

Специальная форма профиля гарантирует высокие прочностные характеристики, а выполняемые на стенках термопрофилей прорези (перфорация – рис. 1В) со смещенным шагом значительно снижают потери тепла через стены из-за удлинения пути холодного потока и особенностей краевых свойств прорезей, позволяют избежать возникновения так называемых «мостиков холода».

Крепление конструктивных элементов между собой производится без применения сварки, при помощи самонарезающих шурупов из высокопрочной стали.

Основные достоинства способа строительства с использованием легких стальных тонкостенных конструкций

1. Для быстровозводимых облегченных строительных конструкций обычно требуется фундамент мелкого заложения (монолитная плита),

свайный или винтовой фундамент. Нет необходимости устраивать фундаменты глубиной до 2-х метров с рытьем котлованов и гидроизоляцией.

2. Сборка каркаса строительного сооружения благодаря легкости и точным, размерам профилей является относительно простой и быстрой. Так, например, бригада из нескольких человек может собрать полностью каркас дома площадью до 600 квадратных метров за 2-3 недели.

3. Отсутствие необходимости применения кранов или грузоподъемных механизмов на всех этапах установки каркаса стен, кровли, перегородок. Особое значение этот фактор имеет при строительстве мансард, на объектах, достаточно отдаленных от автодорог, а также при необходимости максимального сохранения окружающего ландшафта.

4. Использование качественной теплоизоляции в стенах и потолочных перекрытиях позволяет устроить из ограждающих конструкций своеобразный «термос», который в закрытом состоянии может хранить тепло до 2-3 суток не требуя дополнительного отопления, что существенно снижает затраты на энергоносители, стоимость которых имеет тенденцию постоянного роста. Затраты на отопление дома, построенного из ЛСТК составляют 40 % от затрат на аналогичный кирпичный дом.

5. Многовариантность фасадных систем (облицовочный кирпич, виниловый или металлический сайдинг, имитация под искусственный или натуральный камень, деревянная вагонка или «блок-хаус», профлисты с полимерным покрытием и другие современные фасадные материалы) или систем внешней отделки стен здания.

6. Машиностроительная точность размеров внутренних стен, перегородок и потолков до минимума сводит затраты времени и материалов на отделочные работы.

7. Отсутствие «мокрых» процессов позволяет вести работы круглогодично без остановки строительного процесса.

8. Применение ЛСТК позволяет свести до минимума перерабатываемые отходы, а также обеспечить чистоту на строительной площадке, не нанося ущерба окружающей среде.

9. Возможность эффективного ремонта и реконструкции.

10. Широкие возможности для архитектурных решений и проектов. В качестве комплексной строительной системы ЛСТК могут применяться

для возведения малоэтажных зданий высотой до четырех этажей. На основе ЛСТК можно возводить быстрособираемые модульные дома.

Сравнительный анализ физических, механических и технологических свойств легких стальных тонкостенных конструкций и конструкций из дерева

Представим сравнение зданий из двух типов строительных конструкций и материалов по основным критериям здорового жилища: деревянных и стальных тонкостенных (далее «дерево» и «ЛСТК» соответственно).

1. Экологическая чистота

Дерево. Многие традиционно используемые высокотоксичные защитные средства технологически устарели и перестали соответствовать жестким европейским стандартам. Попросту говоря, они оказались не так безобидны, а некоторые даже опасны для природы и человека. Экспортерам древесины зачастую сложно или просто невозможно выполнить технологические требования, предъявляемые зарубежными заказчиками к экспортируемой древесине. Основное требование – экологическая безопасность.

Защитные средства на основе органических веществ позволяют избежать этих проблем, а значит существенно снизить производственные затраты, повысить качество защиты материала от всех видов биоповреждения, снизить экологический риск. Активные органические вещества эффективно защищают древесину. Свойства и качества древесины при этом остаются на уровне экспортных стандартов.

ЛСТК. Неорганические и химически пассивные металл и другие сопутствующие материалы (утеплитель, внутренняя и наружная обшивка стен, отделка), утилизируются на 100%, Не впитывают и не выделяют в воздух химикаты.

«Канадское общество астматиков» (Asthma Society of Canada) признало воздух в помещениях из легких металлоконструкций наиболее пригодным для астматиков, а также людей, чувствительных к химикатам и аллергии.

Дополнительным немаловажным преимуществом этих конструкций с точки зрения защиты экологии является возможность рециркуляции металлоконструкций неограниченное количество раз в будущем.

2. Долговечность

Дерево. Щитовая и каркасная стены обычно рассчитаны на 20-30 лет, бревенчатая и брусчатая – на 30-40 при правильности соблюдения технологии строительства и качества обработки бруса.

ЛСТК. Стальные профили из горячеоцинкованной стали защищены от коррозии на протяжении всего срока службы здания. Срок службы профилей был изучен в английской компании «Бритиш Стил». В результате было показано, что 275 г/м² цинка достаточно для долговечности примерно в 100 лет.

3. Огнестойкость

Дерево. Главный недостаток деревянного дома в том, что он горит – от 40 минут до часа. И любой пожар предусматривает его полное уничтожение. Без обработки специальными составами дом сгорает за 15-30 мин. Но существуют и специальные средства, действие которых направлено непосредственно на защиту от огня. Конечно, ни одно из этих средств не дает 100 % гарантии от пожара, так как не делает дерево абсолютно негорючим. Но каждое из них повышает предел огнестойкости деревянной конструкции. Однако обработку необходимо периодически повторять.

ЛСТК. Согласно заключению по оценке огнестойкости и пожарной опасности ВНИИПО МЧС РФ, полученному на основе испытаний 4-х конструкций каркасного типа, ЛСТК имеют следующие пожарно-технические характеристики:

– несущая стена, мансардное покрытие **R (несущая способность) E (целостность) 45 КО (45);**

– межэтажное и чердачное перекрытие **REI (теплоизолирующая способность) 45 КО (45)).**

4. Экономичность

По данным 2007 года соотношение удельных стоимостей деревянных домов различных типов и дома на основе легкого каркаса следующее.

Если стоимость 1 кв. метра стены (каркас с утеплителем и обшивкой) дома (с работой) принять за 100%, то стоимость деревянного дома (ниже рассматривается 5 типов) окажется следующей:

1. Профилирован. 6-гранный брус – 136,4%.
2. Строганное бревно в чашку – 108,7 %.

3. Лафит – 100,1%.
4. Строганное бревно в лапу – 93,1%.
5. «Канадский дом» – деревянный каркас с утеплителем (с применением бруса клееного из шпона LVL) – 123,1%.

Большинство дополнительных затрат на строительство деревянных домов связано с сооружением фундамента, отличающегося от фундамента для ЛСТК из-за разности весов; а также с подготовкой стен под внутреннюю отделку

5. Вес

Дерево. Масса 1 м² стены, сложенной из бревен составляет 110-130 кг при толщине бревен 220-260 мм.

ЛСТК. Масса 1 м² стены составляет 40-53 кг при толщине 154-204 мм.

6. Теплосбережение

Дерево. Теплотехнический расчет показывает, что деревянная стена толщиной 250 мм (наиболее распространенный габарит бревен) не удовлетворяет действующим нормам и требует дополнительного утепления. Применение 50 мм утеплителя бревенчатая стена практически любой толщины отвечает требованиям к коэффициенту теплопередачи.

ЛСТК. Приведенное сопротивление теплопередаче термопанели шириной 175 мм превышает установленное нормами значение для Санкт-Петербурга (3,15) и составляет $R_0 = 3,26 \text{ м}^2 \text{ }^\circ\text{C/Вт}$.

7. Усадка

Дерево. Большинство строительных фирм предлагает своим клиентам в первый год сложить дом из бруса и только в следующем году производить его отделку. Проблемы усадки решаются при использовании **клееного профилированного бруса**, которая приблизительно в три раза превышает цену оцилиндрованного бревна и других видов бруса.

ЛСТК. Применение ЛСТК обеспечивает абсолютное отсутствие какой-либо усадки в период строительства и эксплуатации.

8. Стойкость к метеовоздействиям

Дерево. Глубокая вакуумная пропитка позволяет защитить от гниения древесный слой в 60–70 мм, а поверхностная антисептическая пропитка захватывает только 6–7 мм, которую необходимо повторять каждые 5-6 лет.

ЛСТК. Профили из горячеоцинкованной стали защищены от коррозии на протяжении всего срока службы здания.

9. Стойкость к биосфере

Дерево. Для защиты древесины от микроорганизмов существуют антисептики, которые уничтожают грибы и насекомых или прекращают их деятельность. Рекомендуется раз в 3 года обновлять покрытие или после обработки поверхности деревозащитными материалами наносить сверху лак.

ЛСТК. Применяемые в ЛСТК компоненты не подвержены воздействию термитов, любых видов грибка и плесени, других организмов.

Как видно из приведенных аргументов ЛСТК имеют преимущества по всем критериям здорового жилья.

Очевидно, что качественное строительство из древесины можно обеспечить только при использовании технологии с применением клееного бруса. Но стоимость изготовления деталей домов явно не вписывается в концепцию доступного жилья.

Кроме малоэтажного индивидуального домостроения легкие стальные тонкостенные конструкции находят широкое применение, а зачастую не имеет достойной альтернативы, и в других областях строительства.

Использование легких стальных тонкостенных конструкций в мансардном строительстве

В последние годы в связи с проблемой реконструкции домов, в том числе и в историческом центре Петербурга, стало активно развиваться строительство мансардных этажей.

Легкие конструкции благодаря своим конструктивным особенностям способны решить главную проблему реконструкции старых зданий - снижению нагрузок, разрушающих стены. Благодаря легкости элементов можно отказаться от тяжелой крановой техники, вести монтаж вручную, не выселяя жильцов и не причиняя им никаких неудобств при реконструкции.

Возведение мансард позволяет не просто продлить срок службы существующих зданий, преобразить их внешний облик, но и создать новые жилые и офисные площади в престижных районах, где получение площадок под новое строительство (так называемых лакун) практически исключено.



Рис. 2В. Каркас мансарды из термопрофиля в здании на 7-ой Красноармейской улице, г. Санкт-Петербург

Фактически в сортамент ЛСТК входят те же самые швеллеры и зетовые профили, но главным отличием от ГОСТ'овских является сниженный погонный вес. Производя расчеты по прочности и устойчивости, согласно современным методикам и исследованиям [4, 5, 11], можно грамотно выбрать конструктивную схему ЛСТК и подобрать сечения, что приведет к снижению веса конструкций мансарды в несколько раз. Это очень важно для работы фундамента здания: фундаменты реконструируемых домов, к сожалению, имеют лимитированный запас прочности.

В связи с этим достаточно интересный проект был сделан Научно-исследовательским отделом проектного института «ЛенжилНИИпроект» – проект реконструкции пятиэтажки по ул. Торжковская д.16.

В существующем 5-этажном здании фонда первых массовых серий постройки 1960-х годов (запасы по несущей способности которого, очевидно, не являются огромными) из легких металлоконструкций был надстроен шестой мансардный жилой этаж.

При этом инвестиции для проекта были привлечены из-за границы: Заказчиком проекта были датчане.



Рис. 3В. Реконструированный жилой дом по ул. Торжковская, д.16

Ограждающие конструкции в сборно-монолитном строительстве

В сборно-монолитном и каркасном строительстве, объемы которого постоянно растут, в качестве эффективных и экономичных ограждающих конструкций можно использовать так называемые термопанели.

Данная технология активно развивается в странах Скандинавии и Прибалтики. В нашей стране, к сожалению, отсутствует широкий опыт применения термопанелей в качестве ограждающих конструкций при многоэтажном каркасном строительстве, хотя первые пилотные проекты с применением данной технологии реализованы в жилищном строительстве в Нижнем Новгороде.

Термопанели – это панели наружных стен с каркасом из термопрофилей. Из термопанелей строятся наружные стены многоэтажных зданий на железобетонном или стальном каркасе, которые воспринимают ветровую нагрузку, действующую на фасад, и переносят её на основной несущий каркас здания.

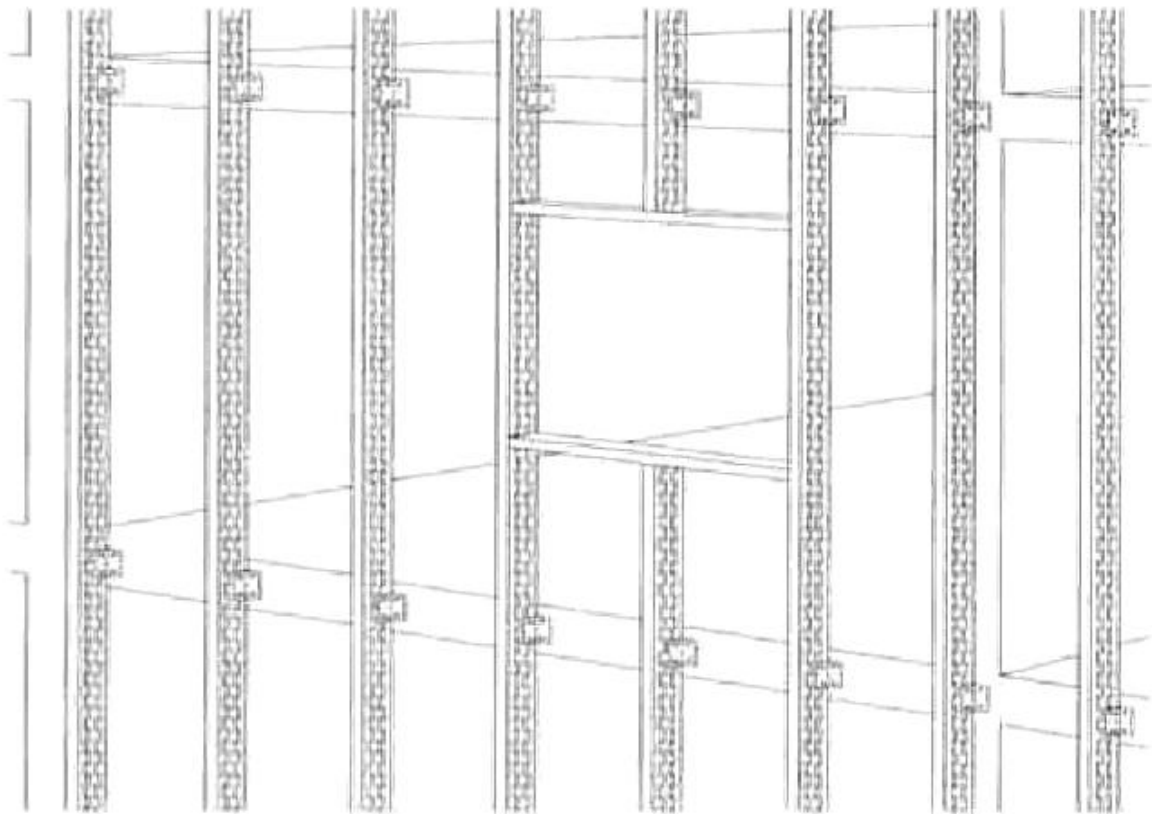
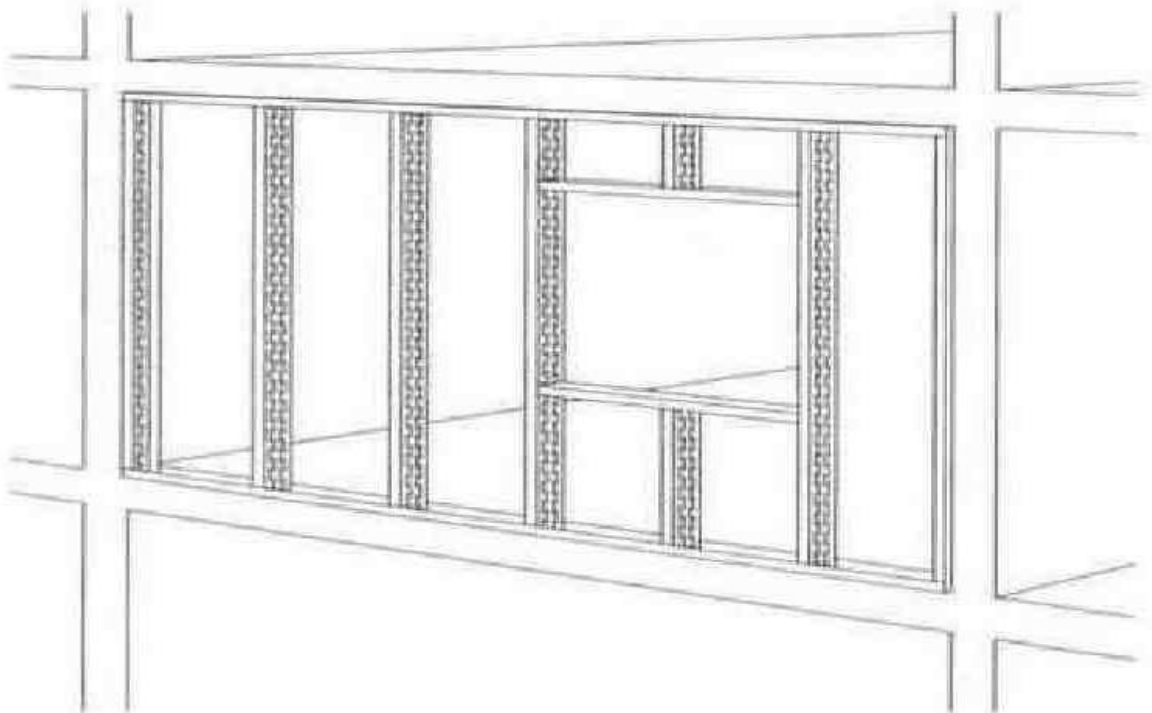


Рис. 4В. Варианты ограждающей конструкции:
а) навесная конструкция стены



б) наружная стена с окном и несущей балкой

Наиболее распространённая конструкция термопанелей, подходящая к климатическим условиям Северо-Западного региона базируется на стоечных профилях шириной 175 мм. Максимальная длина панелей 8,5 м, высота 3,6 м.

Приведенное сопротивление теплопередаче термопанели шириной 175 мм превышает установленное СНИПом значение для Санкт-Петербурга (3,15) и составляет $R_0 = 3,26 \text{ м}^2 \text{ }^\circ\text{C}/\text{Вт}$, вес около 40...45 кг/м².

Производство термопанелей может осуществляться тремя методами:

- непосредственно на объекте;
- «полевое» производство на месте строительства;
- заводское производство.

Выбор способа производства зависит от:

- количества строящихся зданий;
- типа зданий;
- места строительства;
- особенностей строительства;
- уровня капиталовложений.

Остановимся на каждом из методов.

1. Производство непосредственно на объекте

Преимущества:

- не требует затрат на производственные мощности;
- строительные рабочие привыкают к методу работы;
- существует возможность воплощения более поздних решений и изменений;
- используется собственная рабочая сила компании.

Недостатки:

- увеличивается продолжительность строительства;
- необходимо наличие складских помещений материалов на стройплощадке;
- материалы и части зданий подвергаются погодным воздействиям.

2. «Полевое» производство на месте строительства

Термопанели, перекрытия и кровельная система производятся во временных помещениях (временные навесы или цеха из ЛМК) для данного строительного проекта или в отдельной зоне на строительной площадке.

Преимущества:

- узлы производятся в условиях более строгого контроля;
- возможность использования промышленных способов соединения (напр. заклепки);
- высокая производительность труда по сравнению со способом «на месте»;
- возможность избежать затрат на производственные мощности и оборудование;
- отсутствие транспортных расходов;
- хорошие рабочие условия;
- чистая рабочая зона;
- возможность увязки с ходом работ на месте.

Недостатки:

- необходим подъемный кран;
- возможность повреждения материалов при работе;

3. Заводское производство

Преимущества:

- высокая степень точности и высокое качество;
- высокая производительность и малое время сборки;
- малое количество отходов;
- отсутствие необходимости в складских площадях на строительных площадках.

Недостатки:

- затраты на транспортировку;
- возможность повреждений при погрузке-выгрузке и транспортировке;
- необходимость качественной проектно-конструкторской документации на ранней стадии строительства;
- крупные инвестиции в цеха и оборудование.

Рассмотрим основные показатели, позволяющие объективно оценить достоинства применения термопанелей по сравнению с традиционными методами строительства.

Экономичность

Благодаря лёгкости конструкции появляется возможность отказаться от сложных фундаментов в пользу более простых. Это уменьшает расход

бетона на 50-80%, трудозатраты на 40-70%, а, следовательно, и стоимость фундаментов в 2-4 раза.

Легкость термопанели

Масса 1 м² стены составляет 40-53 кг при толщине 154-204 мм, а с облицовкой отделочными материалами от 57 до 200 кг в зависимости от их типа, аналогичный показатель для стен и облицовок из традиционных материалов от 300 до 1055 кг. Этот фактор позволяет существенно сократить затраты на транспортировку и грузоподъемные операции.

Экономия пространства

Уменьшенная толщина термопанели по сравнению с традиционными стеновыми материалами позволяет создавать до 7% дополнительной площади помещений здания.

Ключевые моменты концепции легких стальных тонкостенных конструкций

Итак, главное преимущество каркасного строительства из ЛСТК – максимальная заводская готовность материалов и технология строительства, обеспеченная детальной документацией для сборки.

Проект дома из легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК), в отличие от обычного строительного проекта, относится к машиностроительному конструированию и максимально индустриализует строительный процесс, делает его легко управляемым и поэтому привлекательным для заказчика.

При увеличении объемов малоэтажного строительства возрастает роль индивидуального проектирования, так как малоэтажная застройка всегда более индивидуализирована по архитектуре, а типизация решений не может быть столь масштабной как в многоэтажном строительстве. Решение задачи эффективного строительства в этом случае состоит в применении новых технологий, новых материалов и новых их комбинаций и сочетаний, в комплексном подходе к решениям архитектуры и инженерии.

Экстенсивное наращивание строительства индивидуальных домов с применением унифицированного модульного или панельного производст-

ва по типовым проектам противоречиво и бесперспективно как главный путь решения жилищных проблем в стране, так как в этом случае исключаются из рассмотрения рекреационные аспекты – ландшафтный, экологический, объемно-планировочный, эстетический.

Индустриальное строительство домов по индивидуальным проектам, возможно, но только с применением методов машиностроительного моделирования и автоматизации процессов изготовления по этим проектам каркасных домов, что доказывает мировой опыт.

Таким образом, в постиндустриальной России XXI века обнаруживается явная тенденция к обустройству индивидуального жилого пространства и возврат к истокам *индивидуального домостроения*. Этот возврат требует применения в строительстве новых материалов и технологий, радикально улучшающих среду обитания человека, они существенно улучшают качество жизни, ускоряют строительство и снижают эксплуатационные расходы.

На отечественном рынке появились качественные металлоконструкции отечественного производства. Ассортимент этой продукции включает комплектную строительную систему: профили для наружных и внутренних несущих стен, перегородок, межэтажных каркасных перекрытий, стропильных систем, стальную обрешетку для кровли и стен, кровельные и стеновые покрытия.

Позиционируя каркасный дом как наиболее рациональное жилье для среднего класса, заметим, что каркасная конструкция с применением ЛСТК может послужить основой конструкций для строительства энергоэффективного, комфортабельного индивидуального и недорогого жилья, потребности в котором в России исчисляются миллионами квадратных метров.

Итак, несущие элементы ЛСТК подвергаются тщательному анализу по прочности, жесткости и устойчивости. Созданные методики расчета позволяют это сделать быстро и качественно. Вместе с тем, благодаря работе специалистов методики постоянно обновляются и совершенствуются с развитием компьютерных технологий.

Поэтому первая часть данной книги будет посвящена именно теоретическим основам методики расчета ЛСТК, их обоснованию, сопоставлению и оценке достоверности получаемых результатов.

Во второй части книги приведены конкретные примеры расчета, что способствует более глубокому пониманию вопроса.

Автор выражает признательность сотрудникам кафедры «Технология, организация и экономика строительства» ГОУ СПбГПУ заведующему кафедрой, профессору, доктору технических наук Ватину Николаю Ивановичу и профессору Кузнецову Виктору Дмитриевичу, а также исполнительному директору ООО «БалтПрофиль» Жмарину Евгению Николаевичу, за помощь в решении технических и конструктивных вопросов, возникавших при научных исследованиях, которые легли в основу данного пособия.

Отдельная благодарность старшему преподавателю Гамаюновой Ольге Сергеевне за помощь в подготовке материалов пособия.

Особая благодарность – заведующему кафедрой «Строительная механика и теория упругости», профессору, доктору технических наук Лалину Владимиру Владимировичу.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА ЛЕГКИХ СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ



«Механика – это рай
математической науки, поскольку
мы получаем в ней плоды
математики»

Леонардо да Винчи

1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ. ПОНЯТИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Экспериментально и теоретически установлено, что возможность применения того или иного расчетного метода зависит от соотношения размеров тела. Поэтому в строительной механике по геометрическому признаку все элементы расчетных моделей традиционно классифицируются на три типа:

1. Стержень (рис. 1.1, *a*) – прямолинейный объект, у которого один из размеров намного больше двух других. Т.е. два размера (b и h) находятся в пределах одного порядка, а третий (l) находится в пределах другого, большего, порядка: $b \ll l$ и $h \ll l$.

Мерой порядка в строительной механике обычно служит число 10: два размера (в данном случае b и h) имеют один порядок, если их отношение лежит в пределах $0,1 < b/h < 10$.

Основными характеристиками стержня являются его *ось* (геометрическая форма оси) и *поперечное сечение* (геометрические характеристики профиля).

Частным видом стержня является балка – прямолинейный стержень, работающий на поперечный изгиб.

2. Оболочка (рис. 1.1, *б*) – объект, у которого один из размеров значительно меньше двух других. Т.е. два размера (b и l) находятся в пределах

одного порядка, а третий (l) находится в пределах другого (меньшего) порядка: $b \gg h$ и $l \gg h$. В расчетной схеме оболочку представляют срединной поверхностью (поверхностью, расположенной посередине толщины) и толщиной.

Частным случаем оболочки являются пластина (плита) – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость (рис. 1.1, в).

3. Трехмерное тело (массив – рис.1.1, г) – объект, у которого все три габарита соизмеримы, т. е. находятся в пределах одного порядка.

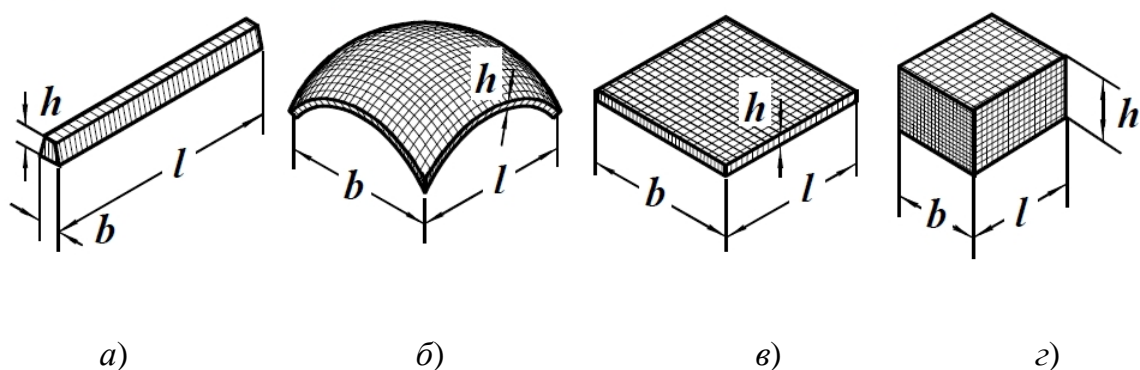


Рис. 1.1. Основные виды расчетных элементов: а) – стержень; б) – оболочка; в) – пластина; г) – твердое тело

Приведенная классификация является в известной мере условной. Тем не менее, она позволяет установить, какой метод для данного тела способен дать достоверные результаты расчета.

Существует еще и четвертый, особый, вид элемента – так называемый **тонкостенный стержень**.

В строительной технике тонкостенным стержнем называется брус призматической или цилиндрической формы, у которого все три измерения выражаются величинами разных порядков. Толщина стенок такого стержня значительно меньше размеров контура поперечного сечения, а размеры контура значительно меньше длины стержня.

В известной литературе и нормативных источниках критерием «тонкостенности» также считается толщина профиля (толщина полок и стенок), независящая от высоты: до 4 мм. Реальные же величины толщин профилей большинства фирм-производителей находятся в пределах от 0,8 до 3 мм.

Все тонкостенные стержни можно разделить на 2 категории:

1. стержни замкнутого (закрытого) профиля;
2. стержни незамкнутого (открытого) профиля.

К стержням первой категории относятся квадратные, прямоугольные и круглые трубы.

Но наиболее распространенными в строительной практике являются стержни первой категории, к которым принадлежат широко применяемые в строительстве профили двутаврового, швеллерового, уголкового, z-образного и E-образного и других очертаний. К незамкнутым профилям относятся такие профили, как швеллер, двутавр, уголкового профиля. Работа таких стержней существенно отличается от работы сплошных стержней.

Кроме того, холодногнутые профили в зависимости от сплошности стенки бывают: перфорированные (рис.1.2, а) и с отсутствием перфорации (рис. 1.2, б).

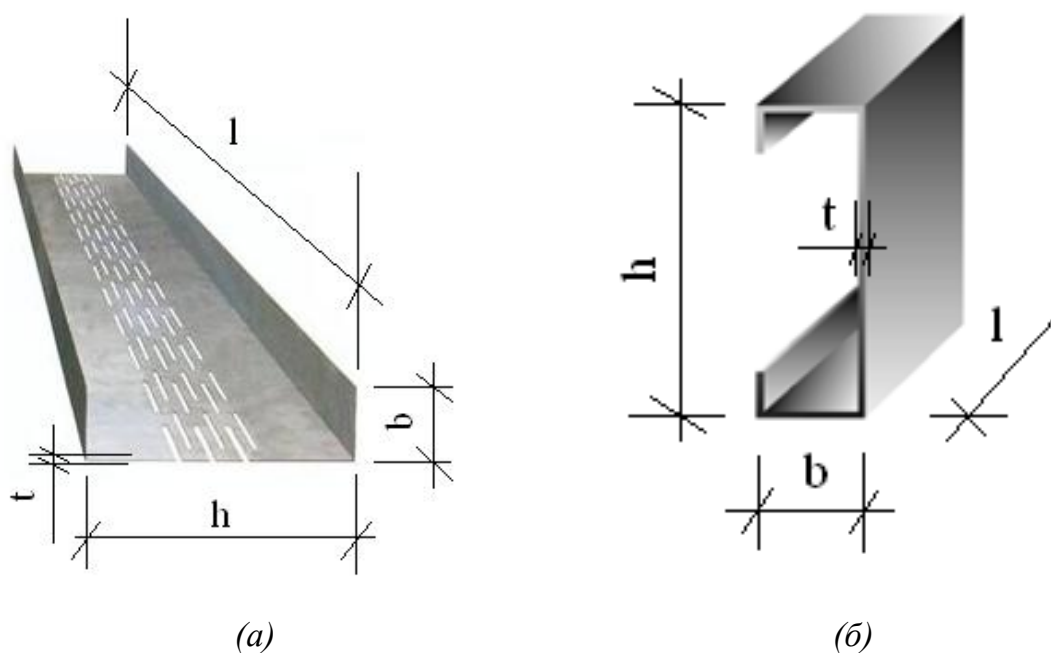
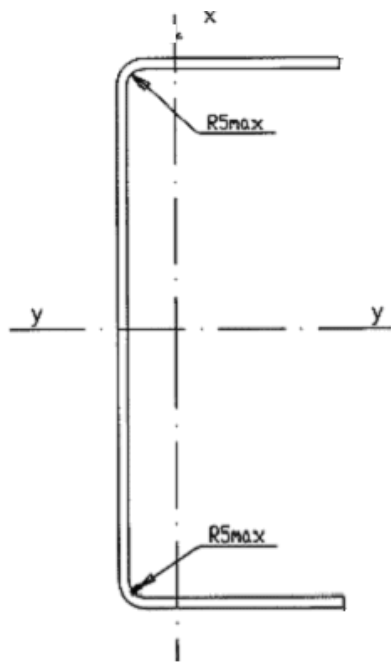


Рис. 1.2. Тонкостенный профиль: а) – перфорированный, б) – без перфорации

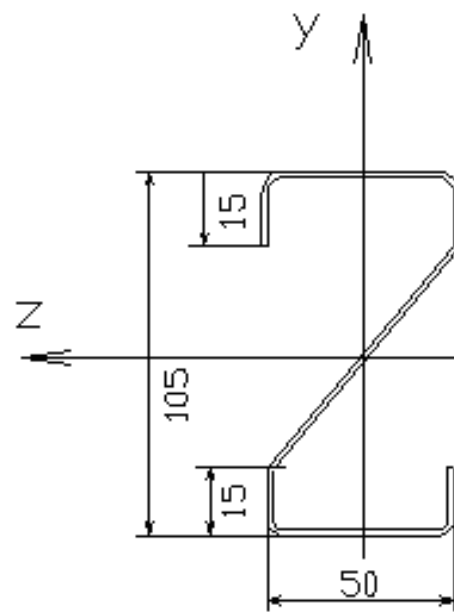
Подробнее о классификации таких стержней, особенностях их производства и расчета описано в разделе 1.8.

Итак, в дальнейшем на протяжении всей работы будем рассматривать **стальные тонкостенные холодногнутые стержни открытого профиля.**

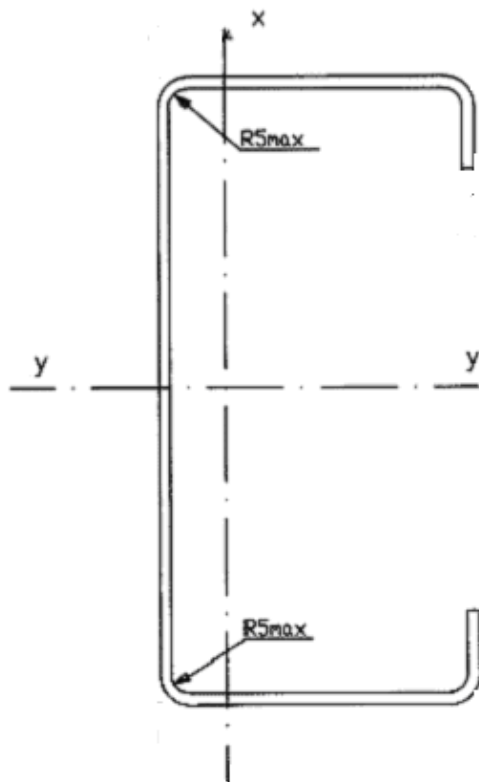
В следующих разделах (1.2-1.8) рассмотрим известные теории и методики расчета стальных тонкостенных элементов, а также особенности напряженно деформированного состояния.



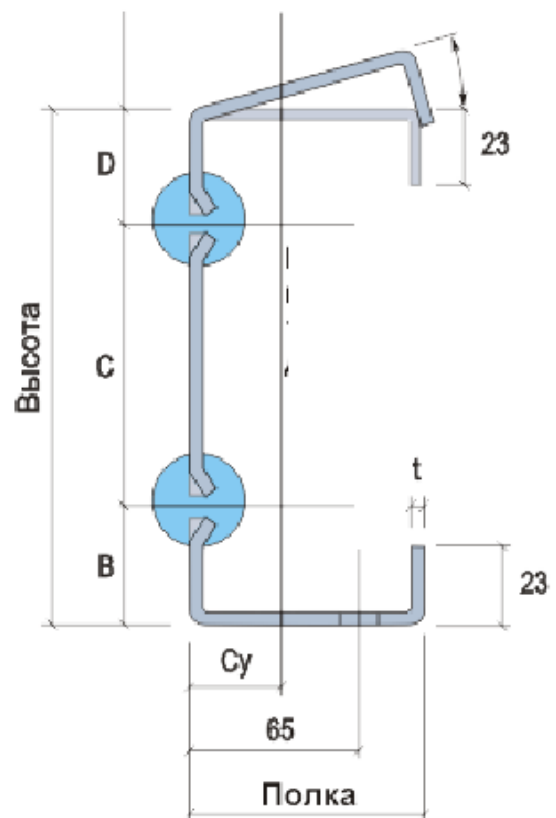
а) швеллеровый (направляющий) профиль



б) z-образный профиль



в) С-образный профиль



г) E-образный профиль

Рис. 1.3. Основные виды тонкостенных холодногнутох профилей

1.2. ИСТОКИ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ РАСЧЕТА СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что распределение напряжений и деформаций в брус при поперечном изгибе зависит не только от величины изгибающего момента, но также и от положения плоскости действия внешних сил (плоскости изгиба).

Гипотеза плоских сечений, лежащая в основе элементарной теории изгиба балок, соблюдается только в одном из частных случаев внешней поперечной нагрузки, а именно в случае, когда эта нагрузка проходит через так называемый центр изгиба.

Если поперечная $q_{рез}$ нагрузка не проходит через центр изгиба (рис. 1.4), то брус кроме деформаций изгиба будет испытывать также и деформации кручения. Поперечные сечения бруса в этом случае не остаются плоскими. Наиболее актуально это для балок, имеющих несимметричный профиль, либо имеющих одну ось симметрии, не совпадающую с осью загрузки (рис. 1.4, а).

Но даже и для балок, имеющих симметричный профиль, зачастую это может быть также опасно. Типичный пример: на двутавр опирается перекрытие, неравномерно нагруженное полезной нагрузкой (рис. 1.4, б).

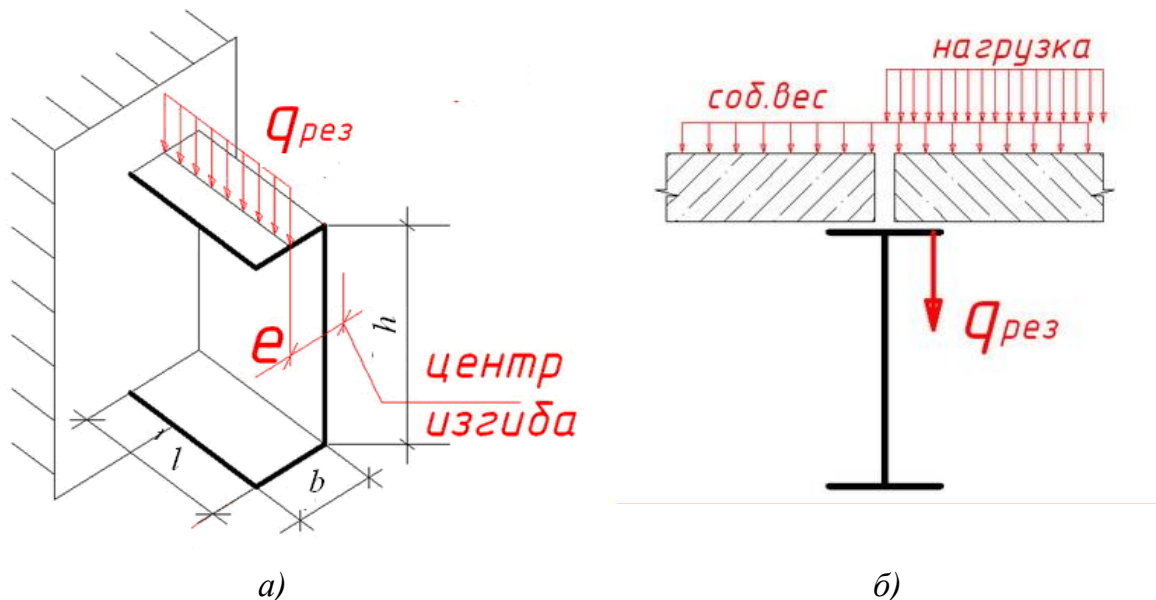


Рис. 1.4. Несовпадение плоскости загрузки с центром изгиба: а) – в несимметричном профиле; б) – в симметричном

В брус (балке открытого профиля), как правило, возникают дополнительные нормальные напряжения (рис.1.5), не следующие закону линейного распределения и образующие по сечению систему продольных сил, статически эквивалентную нулю (рис. 1.6).

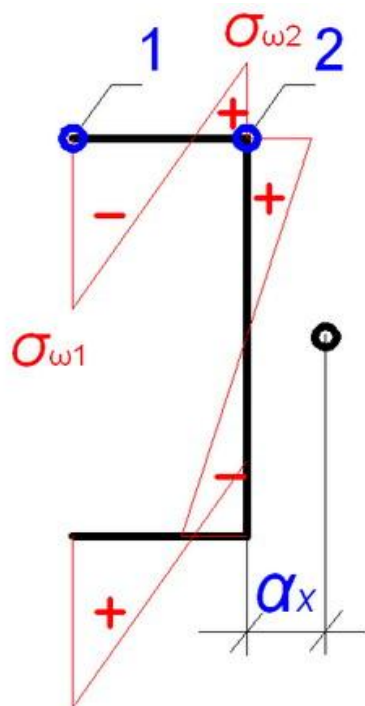


Рис.1.5. Эпюра напряжений от бимомента

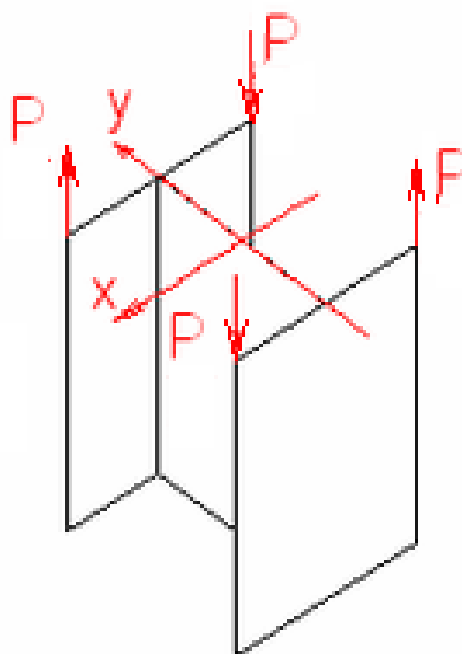


Рис. 1.6. Система сил, статически эквивалентная нулю

В 1855 году Сен-Венаном разработана теория кручения призматического стержня. Было установлено, что для некруглого стержня при наличии связей, мешающих искажению сечения, возникает изгибное или стесненное кручение, при котором в элементе возникают дополнительные нормальные напряжения. Дальнейшее развитие теории привело к разработке мембранной аналогии кручения Прандтля.

Отклонение от закона плоских сечений при действии поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, также обнаружил в 1909 году Бах.

Проводя опыты над металлической балкой швеллерового сечения, Бах установил, что поперечная нагрузка, действующая перпендикулярно к плоскости симметрии швеллера и проходящая через его центр тяжести, наряду с деформациями изгиба вызывает также и деформации кручения. Де-

формации удлинений четырех крайних волокон швеллера при произвольном положении нагрузки не следуют закону плоских сечений.

При прохождении поперечной нагрузки (рис. 1.7, в) через ось стенки швеллера (рис.1.7, а), шарнирно опертого с двух сторон, деформации от кручения в опытах Баха оказались много меньше, чем в случае приложения нагрузки в центре тяжести (рис.1.7, б).

Обнаружив опытным путем отклонения от закона плоских сечений, Бах, однако, не дал правильного объяснения этого явления. Отклонение от закона плоских сечений он объяснил несимметричностью сечения.

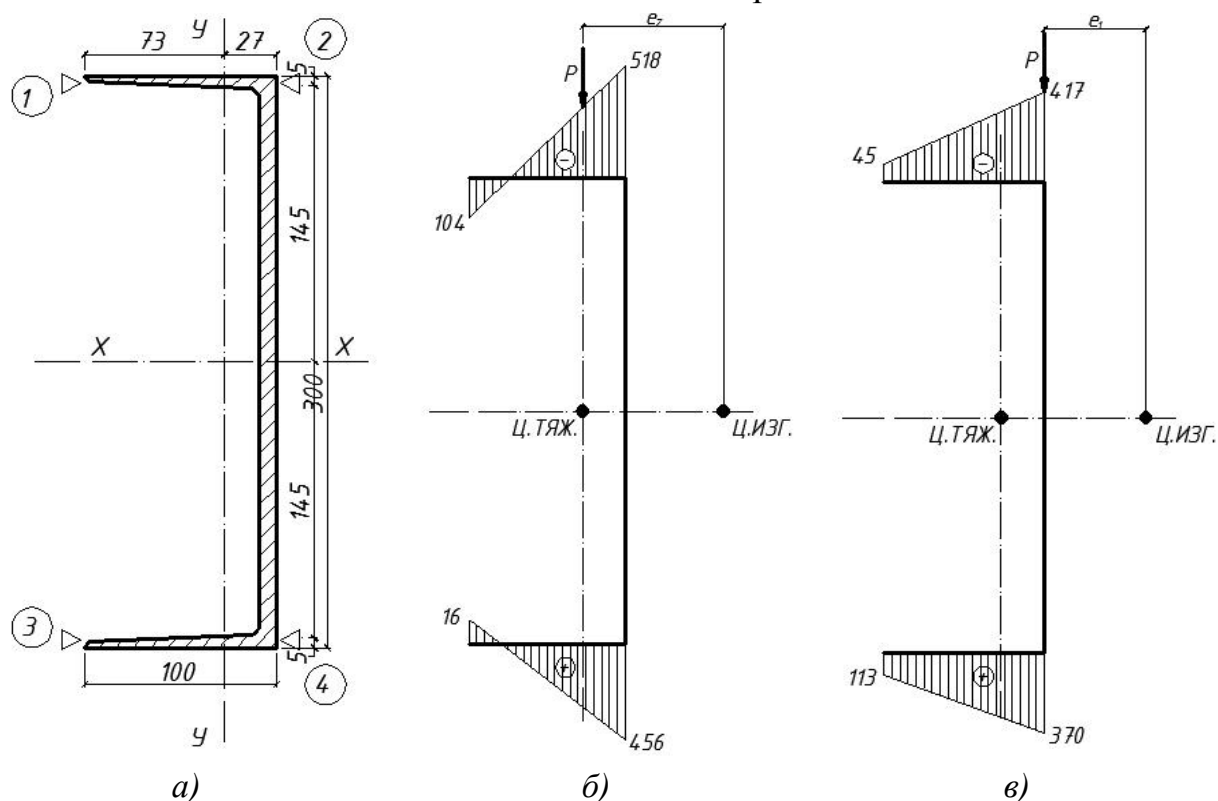


Рис. 1.7. Опыт Баха: а) – сечение исследуемой балки; б) – эпюры нормальных напряжений при действии силы через центр тяжести сечения; в) – эпюры нормальных напряжений при действии силы через ось стенки

Вопросом изгиба и кручения тонкостенных стержней в связи со своей работой по устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки занимался проф. С.П. Тимошенко, работавший и опубликовавший результаты своей работы в 1905-1906 гг. в Санкт-Петербургском политехническом институте. Он экспериментальным путем установил жесткости двутавровых балок при чистом кручении и подробно изучил вопрос о кручении, при котором в поперечных сечениях наряду с касательными напряжениями возникают также и нормальные. Такое состояние балки легко себе предста-

вить, если концы ее закрепить от прогибов и углов закручивания, а в пролете приложить крутящий момент в виде пары сил, действующих в плоскостях полок (рис.1.8). Каждая полка при таком нагружении находится в условиях изгиба, причем прогибы полок имеют разные знаки. В поперечных сечениях возникают деформации, не следующие закону плоских сечений. Эпюра нормальных напряжений от кручения антисимметрична относительно обеих осей симметрии сечения (рис. 1.9).

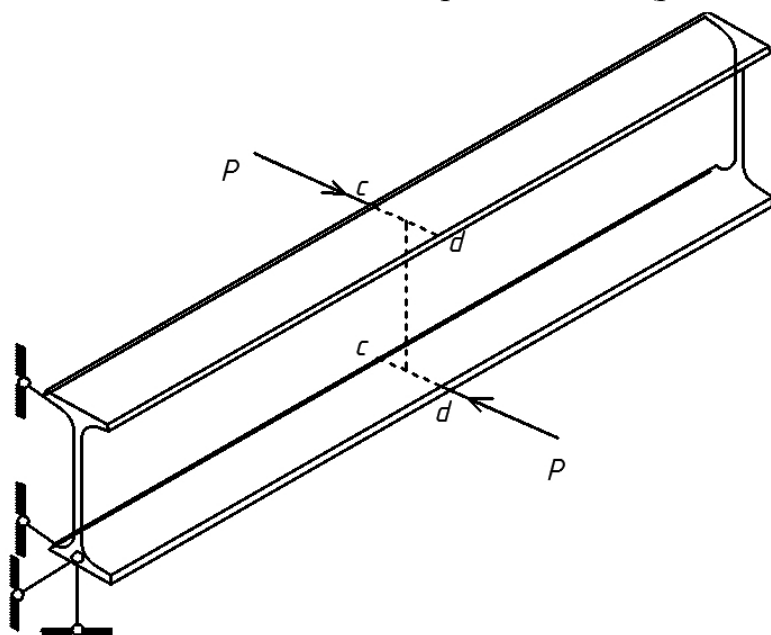


Рис. 1.8. Расчетная схема в исследованиях С.П. Тимошенко

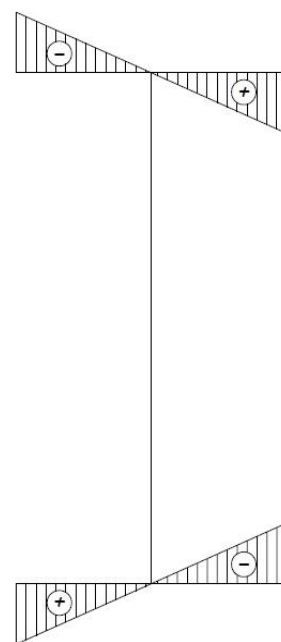


Рис. 1.9. Эпюра нормальных напряжений

Измеренные в опытах С.П. Тимошенко углы кручения хорошо совпали с теоретическими, вычисленными по его формулам.

После работ Баха и Тимошенко вопрос о кручении тонкостенных балок, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, в течение ряда лет в печати не освещался.

В 1921 году, т.е. спустя 12 лет после опытов Баха, появилась работа Майара, посвященная вопросу изгиба и кручения тонкостенных металлических балок. В этой работе автор, анализируя опыты Баха, отмечает, что отклонение от закона плоских сечений при кручении, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, может иметь место также и в симметричных профилях.

В своих последующих статьях, опубликованных в 1922 и 1924 гг., Майар кроме результатов экспериментальных исследований приводит рас-

четные данные по определению центра изгиба. Эти данные автором получены на основании разработанного метода Тимошенко. Центр изгиба по Тимошенко определяется как точка пересечения равнодействующих элементарных касательных напряжений при изгибе балки в главных плоскостях.

Помимо статей Майара в период с 1921 по 1926 года в иностранной технической литературе были напечатаны работы Циммермана, Зонтага, Эгеншвилера и Вебера. Из них наиболее интересной является работа Вебера, в которой автор кроме метода определения центра изгиба дает обобщение результатов Тимошенко по кручению двутавровой балки и метод определения дополнительных нормальных напряжений при кручении для двухполочных профилей (двутаврового с разными полками, швеллерового и зетового). В этой же работе автор обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т.е. точкой сечения, которая при кручении не перемещается. Он доказал, что обе эти точки при кручении, сопровождаемом изгибом полки профиля, совпадают. Вопросом нахождения центра изгиба занимался также академик Б.Г. Галеркин.

Во всех перечисленных работах центр изгиба определялся в зависимости только от формы поперечного сечения. Упругие характеристики материала при этом не учитывались.

Отклонение от закона плоских сечений при кручении тонкостенных стержней, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, играет существенную роль не только в вопросах прочности, но также и в вопросах устойчивости. Экспериментальные исследования, сделанные как российскими, так и зарубежными авторами, показывают, что во многих случаях экстремальными формами потери устойчивости, т.е. формами, дающими наименьшее значение для критической силы, являются крутильные или (в более общем случае) изгибо-крутильными.

Так, например, опыты над дюралюминиевыми авиационными стержнями, сделанные в ЦАГИ в 1934 году, показали, что стержни коробчатого сечения с открытым профилем, как правило, теряют упругую устойчивость вследствие закручивания, причем потеря устойчивости происходит при значениях сил, которые значительно меньше теоретических значений, полученных по формулам Эйлера.

Вопросом устойчивости тонкостенных авиационных стержней занимался немецкий инженер Вагнер; в 1934 году он совместно с Претчером опубликовал теоретическую работу, в которой были даны формулы для определения критических сил при потере устойчивости авиационных стержней в форме закручивания. При выводе своих формул для дополнительных нормальных напряжений от кручения Вагнер пользуется законом, аналогичным закону секториальных площадей, выведенному В.З. Власовым в 1936 году для профилей произвольного очертания (раздел 1.3 и [2]). Следует отметить, что Вагнер при рассмотрении деформации кручения допускает принципиальную ошибку, считая, что центр кручения при потере устойчивости совпадает с центром изгиба. В действительности же центр кручения, как правило, не совпадает с центром изгиба. Совпадение получается только в одном частном случае поперечного сечения стержня, а именно когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. По этой причине формула Вагнера применима только для стержней, имеющих в сечении две оси симметрии.

Из советских исследователей вопросом устойчивости авиационных стержней занимался инженер Знаменский (в связи с экспериментальными исследованиями ЦАГИ, опровергающими теорию продольного изгиба). В 1934 году им была напечатана статья, в которой на основе метода Ритца-Тимошенко были даны приближенные формулы для определения критической силы от продольного закручивания. Однако формулы Знаменского имеют те же пределы применимости, как и формулы Вагнера, поскольку и Знаменский при выводе своих формул исходит из предположения, что центр кручения в момент потери устойчивости совпадает с центром изгиба.

В 1936 году появилась работа Блейха, посвященная вопросу кручения и устойчивости тонкостенных профилей. В этой статье, исходя по существу из гипотезы о недеформируемости контура сечения и пользуясь энергетическим методом, Блейх приходит, в конечном счете, к системе трех дифференциальных уравнений, относящихся к случаю центрального сжатия. Метод, изложенный в этой статье, по мнению других исследователей [2] содержит ряд ошибок.

Одна из основных ошибок заключается в том, что авторы, упуская из виду несоблюдение при кручении закона плоских сечений, заменяют за-

данные в поперечном сечении нормальные напряжения равнодействующей и принимают ее за сосредоточенную силу, приложенную в центре тяжести. Вследствие такой замены в одном из уравнений, приведенных в статье Блейха, а именно в уравнении, выражающем равновесие стержня при вращении относительно продольной оси в последнем (диагональном) члене не содержится продольной силы, что приводит к потере одного из трех корней соответствующего детерминантного уравнения и дает для двух других корней неправильные результаты.

Вторая основная ошибка заключается в том, что авторы применяют свое решение также и к замкнутым профилям, которые являются по существу многосвязными контурами.

И все-таки наибольший вклад в развитие теории тонкостенных стержней внес профессор, доктор технических наук, член-корреспондент Академии наук СССР, лауреат Государственной премии, Василий Захарович Власов (1906-1958), о работе которого будет рассказано в следующей главе.

1.3. ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ В.З. ВЛАСОВА

Техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля построена на следующих геометрических гипотезах:

- стержень рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким контуром;
- деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют.

1.3.1. Стесненное кручение тонкостенного стержня открытого профиля

В задачах о кручении стержня круглого или кольцевого поперечного сечения последние рассматриваются, как жесткие диски. Главным основанием такой предпосылки служат лабораторные испытания.

Аналогичные наблюдения и замеры деформаций показывают, что поперечные сечения некруглой формы в процессе закручивания стержня искривляются – депланируются. И таким образом, оснований для введения гипотезы плоских сечений нет.

Депланация прямоугольного сечения показана на рис. 1.10, а. На этом рисунке поверхность, которую представляет собой депланированное сече-

ние, состоит из восьми треугольных областей, разделенных осями симметрии прямоугольника и его диагоналями. Знаки депланаций в соседних областях различны: выпуклые области соседствуют с вогнутыми.

Депланацию сечений тонкостенных стержней закрытого профиля иллюстрирует рис. 1.10, б, открытого – рис. 1.10, в. Прямолинейные участки сечений остаются прямолинейными, но выходят из начальной плоскости. Знаки продольных смещений углов различны: один наружу, соседний внутрь.

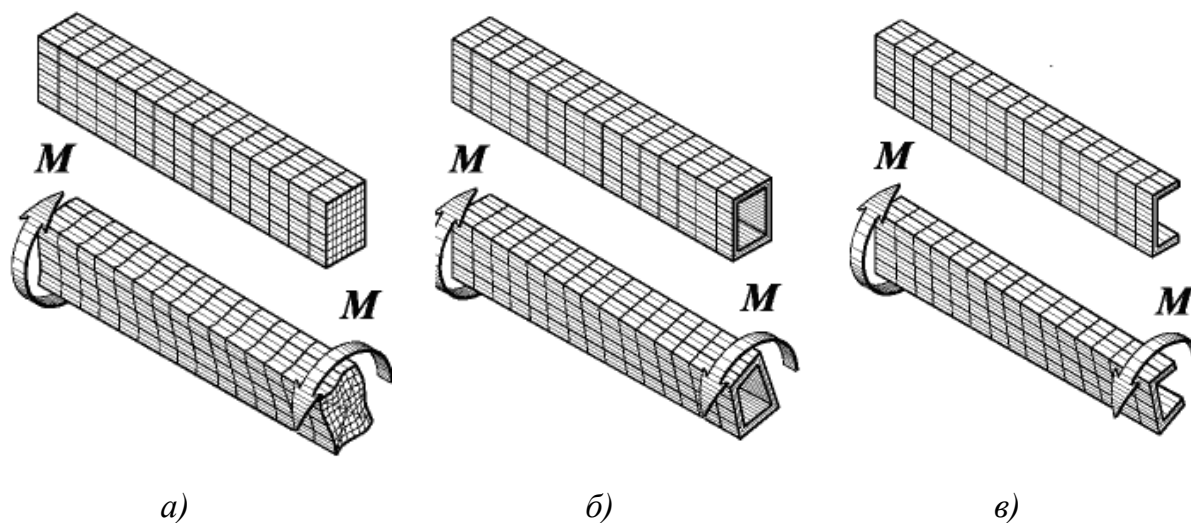


Рис. 1.10. Депланация сечений: а) – сплошного сечения; б) – закрытого тонкостенного профиля; в) – открытого профиля

Если продольные перемещения точек происходят беспрепятственно (свободная депланация), то нормальные напряжения в сечении не возникают. В таком случае кручение называют свободным или чистым. Если же депланация стеснена, то в поперечных сечениях наряду с касательными возникают и нормальные напряжения, и кручение носит название стесненного (рис.1.11).

Решение задачи о кручении стержня с сечением некруглой формы основано на более общих геометрических предпосылках и сводится к сравнительно сложным уравнениям теории упругости, которые будут рассмотрены в следующих разделах.

Итак, под **стесненным кручением** понимается такое кручение, при котором депланация сечений ограничена. К примеру, для защемленного одним концом тонкостенного стержня (рис. 1.11) перемещения для всех

точек сечения в заделке равны нулю. По мере удаления от этого сечения депланация и удельный угол закручивания возрастают.

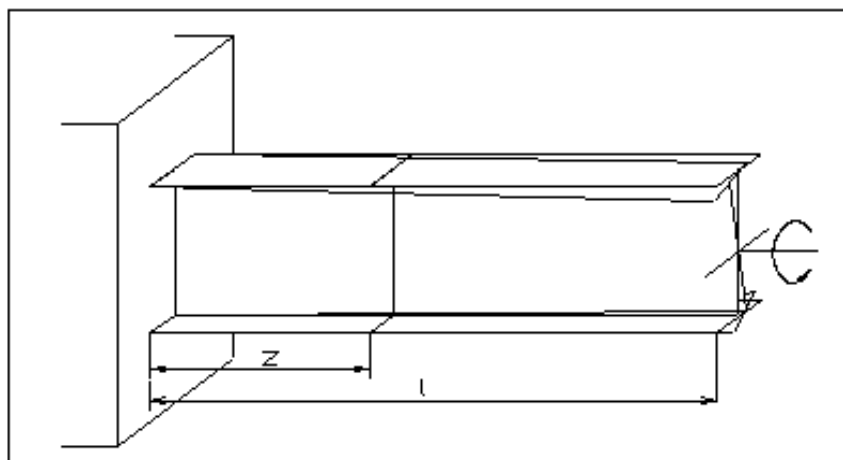


Рис. 1.11. Стесненное кручение стержня

Как было показано в разделе 1.2, в наибольшей степени вышеописанное явление опасно для балок, имеющих несимметричный профиль относительно оси нагружения: несовпадение центра тяжести сечения с центром изгиба (рис.1.4, а) вызывает изгибное кручение и депланацию поперечного сечения.

Задача о кручении стержня с математической точки зрения аналогична другой задаче – деформации гибкой упругой мембраны под равномерным давлением.

Эта аналогия устанавливает, что, если в жесткой невесомой пластинке вырезать отверстие, повторяющее сечение стержня, подверженного кручению, затянуть это отверстие пленкой, нагрузить пленку давлением, то направление касательного напряжения в рассматриваемой точке сечения стержня совпадает с касательной к линии уровня (параллельной плоскости пластины) изогнутой поверхности пленки в соответствующей точке.

Величина касательного напряжения пропорциональна тангенсу угла между линией наибольшего ската (касательной к пленке и перпендикулярной линии уровня) и плоскостью отверстия.

Отмеченные положения мембранной аналогии позволяют:

- установить направление потока касательных напряжений;
- представить картину распределения напряжений;
- выявить опасные точки.

Полученная таким образом информация предоставляет возможность в отдельных случаях ввести необходимые предпосылки и решить задачу. Часто пользуются готовыми решениями теории упругости. В итоге появляется возможность вычисления напряжений и деформаций, проверки прочности материала и жесткости стержня.

1.3.2. Секториальная площадь

Для того чтобы изучить напряженно-деформированное состояние при изгибном кручении, необходимо подробно знать геометрические свойства сечений и, в частности, так называемые секториальные характеристики тонкостенных профилей.

Эти характеристики используются только для тонкостенных стержней и определяются на основе понятия секториальной площади. Определение этих характеристик приведено в следующей главе.

Секториальная площадь представляет из себя удвоенную площадь, описываемую радиус-вектором PA при движении точки A по контуру от начала отсчета O до некоторого значения дуги s . Если радиус-вектор вращается по часовой стрелке, приращение площади ds имеет знак плюс, против часовой стрелки – минус. Секториальная площадь является функцией дуги s и зависит от начала отсчета s и положения полюса P (рис. 1.12).

$$\omega = \int_0^s r ds, \quad (1.1)$$

где:

ω – секториальная площадь;

r – радиус-вектор;

s – дуга.

При переносе полюса секториальная площадь меняется на величины, линейно зависящие от координат x и y . Изменение начала отсчета дуги s (точки O) меняет секториальную площадь во всех точках контура на постоянную величину, поскольку меняется нижний предел интеграла.

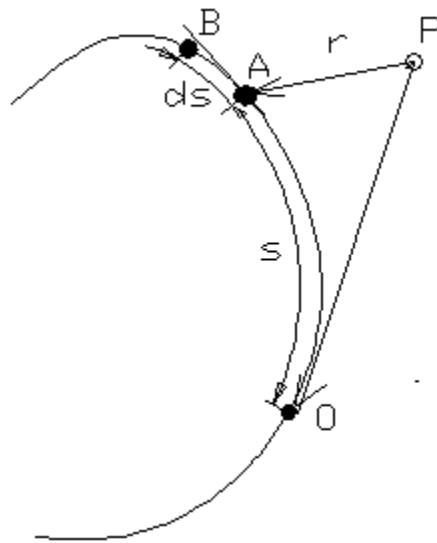


Рис. 1.12. Определение секториальной площади

1.3.3. Геометрические характеристики поперечного сечения

Итак, введение нового вида деформации (депланации) и разделение крутильных деформаций для их определения предполагает введение новых геометрических характеристик, базирующихся на секториальной площади. Остановимся более подробно на них, но для начала дадим краткое определение остальных геометрических характеристик, не зависящих от секториальной площади и используемых при принятии гипотезы плоских сечений.

Моменты инерции

Вычисление части геометрических характеристик (например, площади, моментов инерции, положения центра тяжести) представляет собой вычисление моментов области (Ω), которую покрывает сечение, то есть вычисление величин вида

$$v_{pq} = \int_{\Omega} y^p x^q dydx. \quad (1.2)$$

Например, при $p = q = 0$ мы получаем площадь сечения A .

Часто требуется вычисление моментов, нормализованных площадью (A), то есть величин вида

$$\alpha_{pq} = v_{pq} / A. \quad (1.3)$$

При этом величины α_{01} и α_{10} определяют центр тяжести сечения.

При $p + q \geq 2$ представляют интерес центральные моменты

$$\mu_{pq} = \int_{\Omega} (y - \alpha_{10})^p (x - \alpha_{01})^q dy dx. \quad (1.4)$$

Величины μ_{20} , μ_{02} , μ_{11} представляют собой соответственно центральные моменты инерции относительно осей Z , Y и центробежный момент инерции.

Главные моменты инерции, угол наклона главных осей

Главные моменты инерции вычисляются по формуле

$$I_{u/v} = \frac{(I_y + I_x)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{yx}^2}. \quad (1.5)$$

Угол наклона главных осей инерции:

$$\alpha = \text{arctg} \left(\frac{I_{yx}}{I_y - I_{u/v}} \right). \quad (1.6)$$

В последней формуле для нахождения угла оси наибольшего момента инерции в правую часть нужно подставлять I_u , для нахождения угла наклона оси наименьшего момента инерции следует подставлять I_v .

Радиусы инерции

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}. \quad (1.7.1)$$

Моменты сопротивления

Осевые моменты сопротивления

$$W_{u+} = \frac{I_u}{v_{\max}}; W_{u-} = \frac{I_u}{v_{\min}}; W_{v+} = \frac{I_v}{u_{\max}}; W_{v-} = \frac{I_v}{u_{\min}}, \quad (1.7.2)$$

Где u_{\max} , u_{\min} , v_{\max} , v_{\min} – соответственно максимальные и минимальные расстояния от точек внешней границы сечения до осей U , V (по одну и другую стороны).

Полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{I_y + I_x}{\rho_{\max}}. \quad (1.8)$$

где ρ_{\max} – максимальное расстояние от точек сечения до центра масс.

Величина $I_y + I_x$ называется полярным моментом инерции.

Ядровые расстояния

$$a_{u+} = \frac{W_{u+}}{A}; a_{u-} = \frac{W_{u-}}{A}; a_{v+} = \frac{W_{v+}}{A}; a_{v-} = \frac{W_{v-}}{A}. \quad (1.9)$$

Жесткость кручения

Рассмотрим в области Ω функцию $\varphi(x, y)$ (функцию напряжений или функцию Прандтля), которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi + 2 = 0 \quad (1.10)$$

и, кроме того, $\varphi = 0$ на границе области Ω в том случае, когда Ω является односвязной. В случае многосвязной области (при наличии отверстий) предполагается, что $\varphi = 0$ на внешней границе области Ω , а на каждой из внутренних границ ($L_i, i=1, \dots, n$) функция напряжений постоянна, причем постоянные $U_i (i=1, \dots, n)$ таковы, что выполнены соотношения

$$\oint_{L_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = -2\Omega_i, \quad (1.11)$$

где Ω_i - площадь области, ограниченной контуром L_i .

Величина

$$I_d = 2 \left(\iint_{\Omega} \varphi(x, y) dx \cdot dy + \sum_{i=1}^n U_i \Omega_i \right) \quad (1.12)$$

называется моментом инерции при кручении.

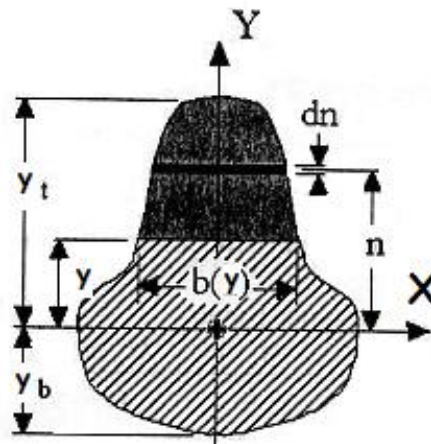


Рис. 1.13. Поперечное сечение. Иллюстрация для определения геометрических характеристик

Площади сечения при сдвиге

Предположим, что на рис. 1.13 изображено сечение, причем оси X, Y являются главными.

Пусть

$$Q(y) = \int_y^{y_1} nb(n)dn. \quad (1.13)$$

Сдвиговой площадью относительно оси Y называется величина

$$\frac{I_x^2}{\int_{y_b}^{y_1} \frac{Q(y)^2}{b(y)} dy}. \quad (1.14)$$

Аналогично определяется сдвиговая площадь относительно оси Z.

Пластические моменты сопротивления

Обозначим через Ω область сечения. Пусть Ω_2 - часть области Ω , лежащая по одну сторону от главной оси U. Пластическим моментом сопротивления сечения при изгибе относительно оси U называется величина

$$W_{pl,u} = 2 \int_{\Omega_2} v d\omega. \quad (1.15)$$

Аналогично определяется пластический момент $W_{pl,u}$ относительно главной оси V.

Центр изгиба

Существует такая точка, относительно которой момент касательных сил в сечении при поперечном изгибе равен нулю. Эта точка называется центром изгиба. Если момент касательных сил в сечении относительно центра изгиба равен нулю, то и момент внешних сил относительно центра изгиба должен быть равен нулю, иначе в бруске возникнут деформации, свойственные не только поперечному изгибу, но и кручению. Поэтому очевидно целесообразно при определении внутренних силовых факторов приводить касательные силы в сечении не к центру тяжести, а к центру изгиба и под крутящим моментом понимать соответственно внутренний момент относительно центра изгиба. Секториально-линейные моменты относительно главных центральных осей и полюса, совпадающего с центром

изгиба, равны нулю. Положение центра изгиба определяется на основании секториальной площади.

Координаты центра изгиба (в главных центральных осях) определяются по формулам

$$x = \frac{1}{I_x} \oint_{\Omega} \omega(y, x) y dy dx ; \quad (1.16)$$

$$y = \frac{1}{I_y} \oint_{\Omega} \omega(y, x) x dy dx , \quad (1.17)$$

где $\omega(x, y)$ – функция кручения Сен-Венана. Эта функция является гармонической в области Ω ($\Delta\omega = 0$) и на границе удовлетворяет условию

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = y \cdot \cos(nx) - x \cdot \cos(ny) \quad (1.18)$$

и, кроме того,

$$\oint \frac{\partial\omega}{\partial n} ds = 0 . \quad (1.19)$$

Секториальные характеристики

В связи с появлением седьмой степени свободы возникают следующие геометрические характеристики стержня: секториальный статический момент инерции

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF \quad [\text{см}^4] , \quad (1.20)$$

секториально-линейные моменты площади

$$U_x = \int_F y \omega dF \quad [\text{см}^5] , \quad (1.21)$$

$$U_y = \int_F x \omega dF \quad [\text{см}^5] , \quad (1.22)$$

секториальный момент инерции

$$I_{\omega} = \int_F \omega^2 dF \quad [\text{см}^6] , \quad (1.23)$$

где $\omega(y, z)$ – секториальная площадь.

Ввиду того, что секториальная площадь не является постоянной характеристикой поперечного сечения, характеристики (1.20 - 1.23) также не будут являться постоянными по сечению, и для вычисления напряжений и деформаций необходимо использовать их текущее значение в рассматриваемой точке.

1.3.4. Секториальные координаты и секториальные геометрические характеристики в швеллере

Пусть b и δ_1 – соответственно ширина и толщина полки, а h и δ – ширина и толщине стенки швеллера (рис.1.14). Центр изгиба для швеллера лежит на оси симметрии Ox . Расстояние до этого центра от стенки определяется по формуле (1.16).

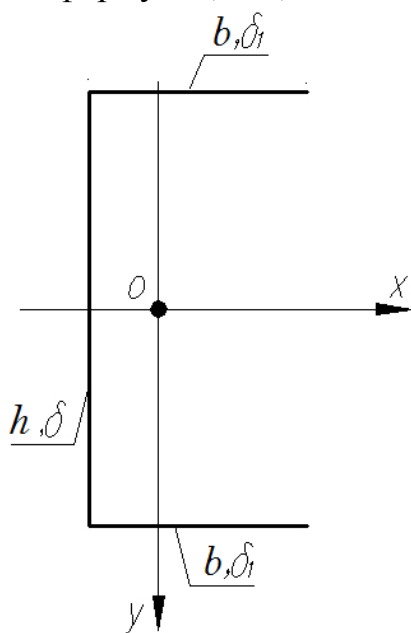


Рис.1.14. Поперечное сечение швеллера

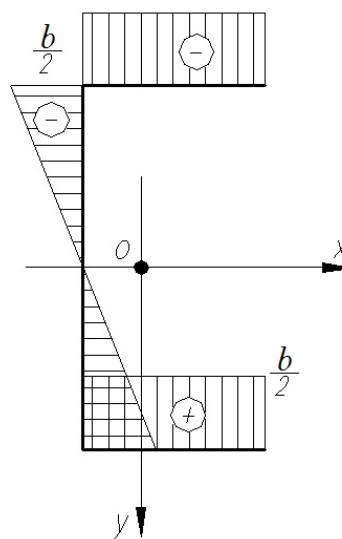


Рис. 1.15. Эпюра ординат

На рис. 1.16 приведена эпюра секториальных площадей ω_B с полюсом в точке B пересечения стенки с осью симметрии, на рис. 1.15 дана эпюра ординат y . Интегрируя эпюру ω_B с эпюрой y и учитывая толщину полки δ_1 , получим:

$$\int \omega_B y dF = -\frac{h^2 b^2 \delta_1}{4}. \quad (1.24)$$

Момент инерции I_x вычисляется как интеграл из квадрата эпюры ординат y , помноженного на дифференциал площади сечения dF . Имеем:

$$I_x = -\frac{h^3 \delta}{12} + \frac{h^2 b \delta_1}{2}. \quad (1.25)$$

Подставляя выражения (1.24) и (1.25) в формулу (1.16) получим:

$$\alpha_x = -\frac{b^2 \delta_1}{2b\delta_1 + \frac{h\delta}{3}}. \quad (1.26)$$

Эпюра главных секториальных площадей ω представлена на рис 1.17. Началом отсчета площадей служит точка B , лежащая на оси симметрии. Секториальные площади для точек стенки, лежащих ниже оси Ox , будут иметь положительные значения, поскольку эти площади описываются движением радиус-вектора AM по часовой стрелке. Секториальные площади для стенки по мере удаления от начальной точки возрастают. В точке примыкания полок к стенке эти площади достигают наибольших значений, что указывает на то, что при кручении в углах швеллера будут возникать наибольшие (дополнительные) напряжения.

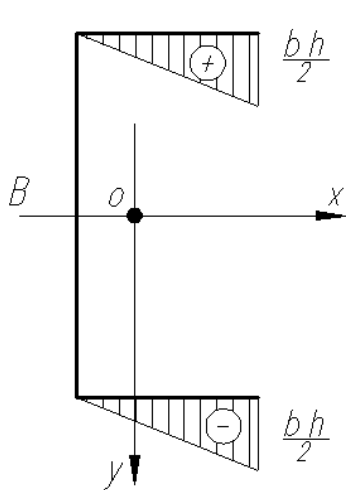


Рис.1.16. Эпюра секториальных координат

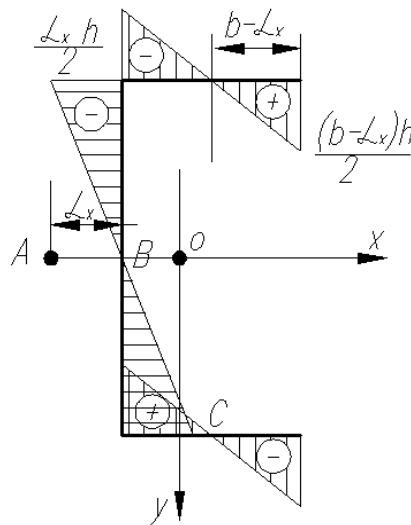


Рис. 1.17. Эпюра главных секториальных координат

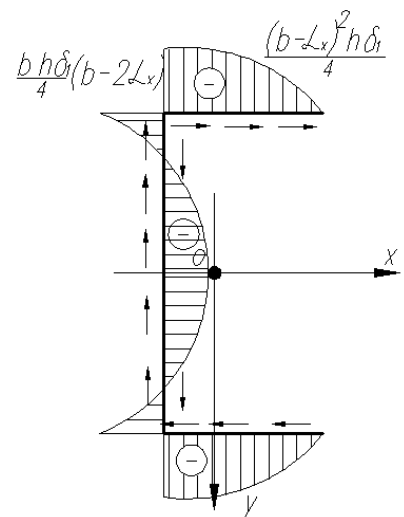


Рис. 1.18. Эпюра секториальных статических моментов

Секториальная площадь для полок по мере удаления от стенки убывает и в точке C , находящейся от стенки на расстоянии, равном расстоянию до центра изгиба от стенки, принимает нулевое значение. Относительно оси симметрии OA эпюра секториальных площадей имеет антисимметричный вид.

Секториальный момент инерции J_ω вычисляется как интеграл из квадрата эпюры ω , помноженного на dF . Пользуясь приемами строительной механики, получим:

$$I_\omega = \frac{1}{6}(b - 3\alpha_x)\delta_1 b^2 h^2 + \alpha_x^2 I_x. \quad (1.27)$$

I_x - момент инерции относительно оси Ox определяется по формуле:

$$I_x = \frac{h^3 \delta}{12} + \frac{h^2 b \delta_1}{2}. \quad (1.28)$$

На рис. 1.18 приведена эпюра секториальных статических моментов S_ω , характеризующих распределение по сечению сдвигающих усилий $T = \tau\delta$ от кручения.

Эти моменты на каждом прямолинейном участке контура меняются по закону квадратной параболы и принимают максимальные (по абсолютной величине) значения в тех точках, где секториальные площади ω равны нулю.

1.3.5. Система дифференциальных уравнений равновесия стержня

Пусть $\sigma = \sigma(z, s)$ и $\tau = \tau(z, s)$ соответственно нормальные и касательные напряжения, действующие в точке $M(z, s)$ поперечного сечения стержня; $H = H(z)$ – крутящий момент, приходящийся на все поперечное сечение $z = const$ и получающийся только от разности касательных напряжений в крайних точках стенки.

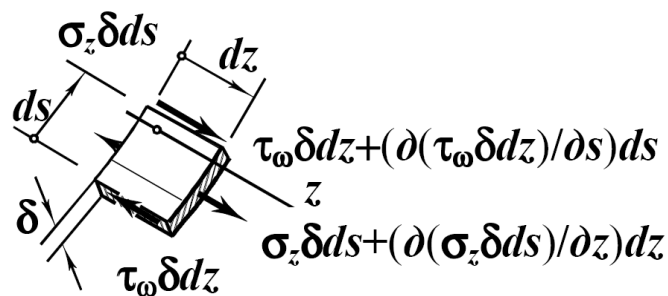


Рис. 1.19. Равновесие элементарной пластинки

В [2] выводится следующая система дифференциальных уравнений равновесия стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} EF\zeta'' + q_z + T_K - T_L = 0 \\ -EI_y \xi^{IV} + q_x + \int_{\Omega} \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + T_L' x_L - T_K' x_K = 0 \\ -EI_x \eta^{IV} + q_y + \int_{\Omega} \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + T_L' y_L - T_K' y_K = 0 \\ -EI_{\omega} \theta^{IV} + GI_d \theta'' + m + \int_{\Omega} \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + T_L' \omega_L - T_K' \omega_K = 0 \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Свободные члены уравнения системы (1.29) определяются внешней поверхностной нагрузкой, дающей в общем случае компоненты по всем трем взаимно перпендикулярным направлениям, и сдвигающими усилиями, действующими вдоль продольных краев стержня. Эти свободные члены представляют собой заданные функции $p_z = p_z(z, s)$ – проекции интенсивности внешней нагрузки на ось z ; эта проекция в общем случае зависит от двух переменных z и s . $T_K = T_K(z)$ и $T_L = T_L(z)$ – сдвигающие усилия, приложенные по продольным краям стержня.

Если продольные края стержня свободны от сдвигающих сил и поверхностная нагрузка для произвольной точки (z, s) выражается вектором в плоскости Oxy , то $T_K = T_L = 0$, $q_z = 0$ и система уравнений принимает следующий вид (1.30):

$$\left\{ \begin{array}{l} EF\zeta'' = 0 \\ -EI_y \xi^{IV} + q_x = 0 \\ -EI_x \eta^{IV} + q_y = 0 \\ -EI_{\omega} \theta^{IV} + GI_d \theta'' + m(z) - b'(z) = 0 \end{array} \right. \quad (1.30)$$

где q_x и q_y – интенсивности погонных поперечных нагрузок; $m(z)$ – интенсивность внешнего крутящего момента от поперечных нагрузок q_x и q_y относительно центра изгиба; $b(z)$ – интенсивность внешних распределенных бимоментов.

Первым из уравнений системы (1.30) определяются продольные перемещения $\zeta(z)$ от продольной сжимающей или растягивающей силы, приложенной по концам стержня и распределенной по сечению равномерно. Второе и третье уравнения относятся к поперечному изгибу стержня. Этими уравнениями и граничными условиями определяются прогибы $\xi(z)$ и $\eta(z)$ линии центров изгиба в главных плоскостях стержня.

Последнее из уравнений (1.30) вместе с граничными условиями позволяют определить углы закручивания $\theta(z)$.

Четвертое уравнение системы (1.30) можно представить в виде:

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' = \frac{m(z) - b^I(z)}{EI_\omega}, \quad (1.31)$$

где k – изгибно-крутильная характеристика стержня, обозначенная как

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} \quad (1.32)$$

И являющаяся, по сути, характеристическим числом четвертого уравнения дифференциального равновесия системы (1.30).

Решение уравнения (1.31) имеет вид:

$$a = f_0(z) + f(z), \quad (1.33)$$

где $f_0(z)$ – общий интеграл однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1.31), равный

$$f_0(z) = Ashkz_1 + Bchkz + Cz + D; \quad (1.34)$$

$f(z)$ – частный интеграл уравнения (1.31), зависящий от характера нагружения стержня.

Произвольные постоянные интегрирования A, B, C, D зависят от граничных условий. Решения уравнения (1.31) с использованием метода начальных параметров получены Власовым В.З. [2]. Определены значения реакций в связях на угол закручивания и депланацию для стержня с концами, закрепленными от закручивания и депланации при заданных единичных углах закручивания и депланации по концам стержня.

Подробнее о граничных условиях описано в главе 1.3.8.

1.3.6. Общий случай нагружения тонкостенного стержня. Бимомент. Нормальные напряжения

Определив функции $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\theta(z)$ из системы уравнений (1.30) мы можем найти нормальные и касательные напряжения, а также крутящие моменты, возникающие в поперечном сечении стержня. Для этих напряжений и моментов в случае $T_K = T_L = 0$, $q_z = 0$ мы имеем следующие выражения:

$$\begin{cases} \sigma = E(\zeta' - \xi'' x - \eta'' y - \theta'' \omega) \\ \tau = E(\xi''' \frac{S_y(s)}{\delta} + \eta''' \frac{S_x(s)}{\delta} - \theta''' \frac{S_\omega(s)}{\delta}) \\ M_\kappa = GI_d \theta' \end{cases} \quad (1.35)$$

Где x и y – координаты точки поперечного сечения относительно главных осей, а функция ω взята в соответствии с главной эпюрой секториальной площади.

При поперечном изгибе тонкостенного стержня в его сечении преобладающими остаются нормальные напряжения σ , ими в основном определяется прочность стержня. Нормальные напряжения в сечении умножаем это выражение последовательно на dF , xdF , ydF , wdF и интегрируем по площади поперечного сечения. При этом учитываем, что оси x и y – главные, а эпюра ω – эпюра главной секториальной площади. Получаем

$$N = EF \zeta' , \quad (1.36)$$

$$M_y = EI_y \xi'' , \quad (1.37)$$

$$M_x = -EI_x \eta'' , \quad (1.38)$$

$$B_\omega = -EI_\omega \theta'' . \quad (1.39)$$

В формуле 1.39 через B_ω обозначена новая силовая характеристика, определяемая выражением и называемая бимоментом. Размерность бимоента: единица силы, умноженная на квадрат единицы длины. Таким образом, единицы измерения бимоента могут быть $кгс\ см^2$, $тс\ м^2$ и др. В отличие от уже известных внутренних силовых факторов бимомент является самоуравновешенным фактором и из условий равновесия отсеченной части стержня быть определен не может.

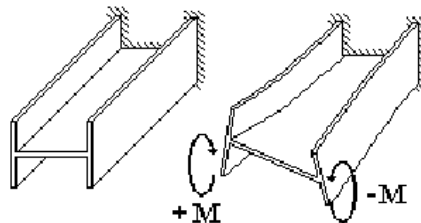


Рис. 1.20. Иллюстрация действия бимоента

Бимомент характеризует изменения, вносимые в линейные зоны распределения напряжений деформации сечения и, по сути, является парой моментов, направленных в противоположные стороны (рис. 1.20) или че-

тырьмя силами, что проиллюстрировано на рис. 1.21, где в качестве примера внецентренно сжимающая сила статически представлена как суперпозиция четырех силовых факторов: продольной нагрузки N , изгибающих моментов M_x и M_y и бимоента B_ω :

$$N = P, \quad (1.40)$$

$$M_x = \frac{Pb}{2}, \quad (1.41)$$

$$M_y = \frac{Ph}{2}, \quad (1.42)$$

$$B_\omega = \frac{Pbh}{4}. \quad (1.43)$$

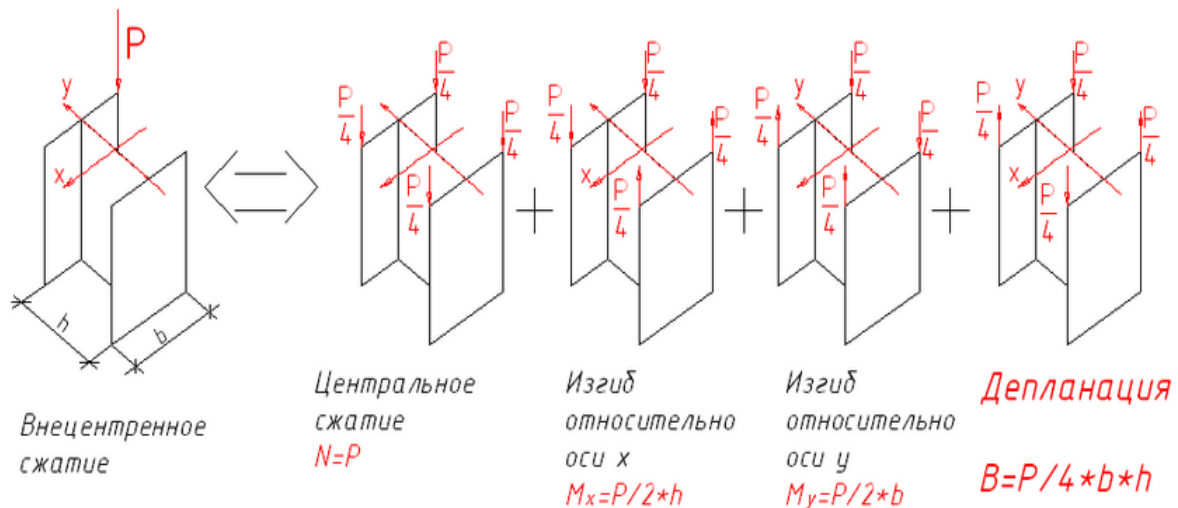


Рис. 1.21. Иллюстрация статического разложения внецентренно сжимающей силы

Иными словами, внецентренное сжатие заменяется на совокупность четырех видов деформаций: центральное сжатие, изгибы в одной и другой плоскости и депланацию.

Как видно из первого уравнения 1.35 и формул 1.40-1.43, трехчленная формула нормальных напряжений, справедливая при принятии гипотезы плоских сечений, при учете депланации и добавлении четвертого слагаемого приобретает следующий вид:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{B_\omega}{W_\omega}. \quad (1.44)$$

Первые три слагаемых в правой части формулы (1.44) соответствуют обычной теории сложного сопротивления, базирующейся на гипотезе плоских сечений. Последний член этой формулы определяет величину дополнительных секториальных напряжений σ_ω :

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega}, \quad (1.44)$$

которые возникают вследствие переменной по длине деформации сечения. Напряжения σ_ω распределяются в сечении по закону секториальной координаты ω (см. рис.1.22 и 1.23), образуют самоуравновешенную систему внутренних усилий, приводящуюся к двум равным противоположно направленным парам.

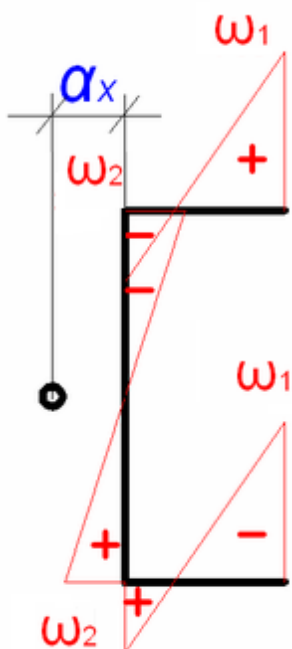


Рис.1.22. Эпюра секториальных координат в швеллера

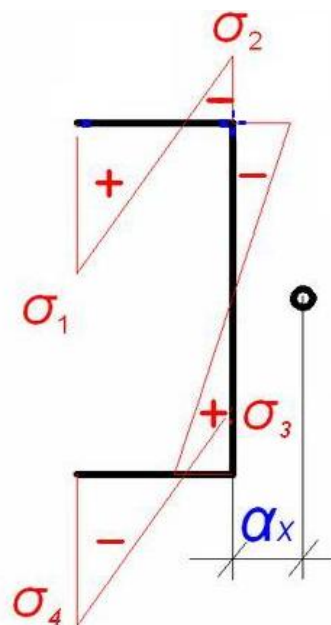


Рис. 1.23. Эпюра распределения составляющей нормальных напряжений от бимоментов швеллере

При этом следует сделать оговорку, что знаки слагаемых в уравнении могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от физического их смысла, характеризующегося эпюрами внутренних силовых факторов.

Предпосылки о касательных напряжениях: в любой точке поперечного сечения касательные напряжения параллельны касательной к про-

фильной линии (рис. 1.22), по толщине стенки касательные напряжения линейно переменны (рис. 1.23).

1.3.7. Касательные напряжения в сечении

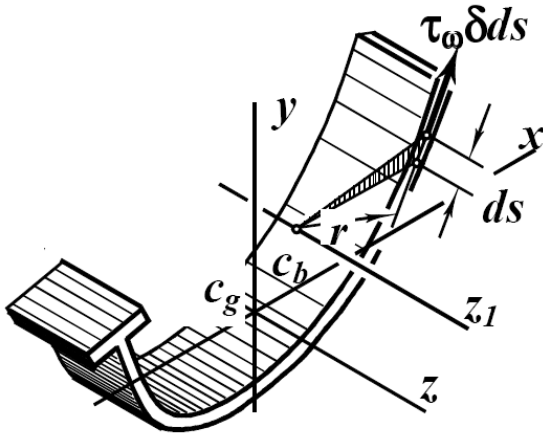


Рис.1.22. Распределение касательных напряжений по толщине профиля

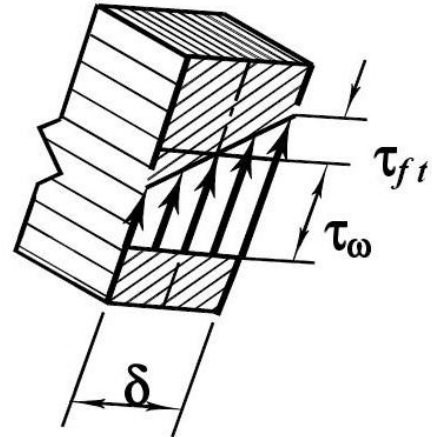


Рис.1.23. Кососимметричные касательные напряжения

При этих допущениях они разлагаются на два вида напряжений: симметрично распределенные по толщине стенки и кососимметричные (рис. 1.24 и 1.25)

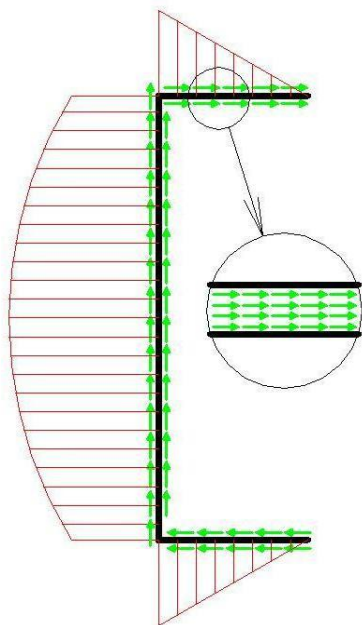


Рис.1.24. Кососимметричные касательные напряжения

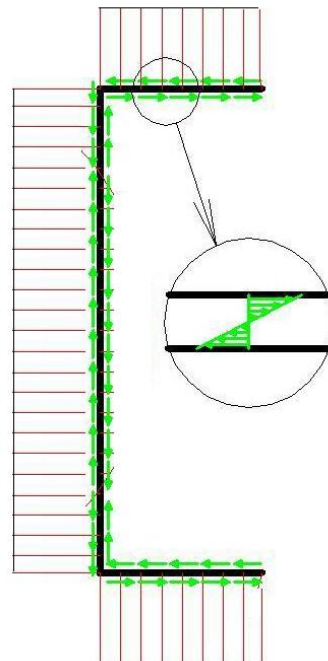


Рис.1.25. Симметричные касательные напряжения

Остановимся на вычислительных формулах для этих касательных напряжений.

Проинтегрировав второе уравнение (1.35), получаем еще три силовых фактора: Q_x – поперечная сила в направлении x ; Q_y – поперечная сила в направлении y ; M_ω – секториальный крутящий момент:

$$Q_x = -EI_x \xi''' = \frac{dM_y}{dz}, \quad (1.45)$$

$$Q_y = -EI_y \eta''' = \frac{dM_x}{dz}, \quad (1.46)$$

$$M_\omega = -EI_\omega \theta''' = \frac{dB_\omega}{dz}, \quad (1.47)$$

Примечательно, что представленные выше силовые факторы, связаны дифференциальными зависимостями с силовыми факторами нормальных напряжений (соответственно формулы (1.37-1.39)) при переменной z .

Однако секториальный крутящий момент, отвечающий за «симметричные» касательные напряжения, является лишь одной из крутящей силовой составляющей. Второй крутящей составляющей является крутящий момент (третье уравнение 1.35)

$$M_\kappa = GI_d \theta'. \quad (1.48)$$

Таким образом, общий крутящий момент будет складываться из крутящего момента и секториального крутящего момента:

$$M_{o.k.} = M_\kappa + M_\omega. \quad (1.49)$$

И если физический смысл обеих составляющих формулы (1.49) недостаточно ясен, то смысл общего крутящего момента вполне очевиден: это момент, образованный поперечной нагрузкой, приложенной к балке с эксцентриситетом. Математически это выглядит так:

$$q(z) \cdot e = \frac{dM_{o.k.}}{dz}. \quad (1.50)$$

Таким образом, как видно из формул (1.36-1.39; 1.45, 1.46 и 1.49), напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня открытого профиля характеризуется семью внутренними силовыми факторами, которым соответствует 7 видов деформаций, представленных в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Силовые факторы и виды деформаций при стесненном кручении

№	Силовой фактор	Вид деформации
1	продольная сила N	растяжение/сжатие
2	поперечная сила Q_x	сдвиг по оси x
3	поперечная сила Q_y	сдвиг по оси y
4	изгибающий момент M_x	изгиб по оси x
5	изгибающий момент M_y	изгиб по оси y
6	крутящий момент $M_{o.k.}$	кручение
7	бимомент B_ω	депланация

Вернемся к касательным напряжениям. Касательные напряжения τ в поперечном сечении стержня в общем случае нагружения слагаются из напряжений простого кручения τ_k , из касательных напряжений поперечного изгиба в обоих направлениях ($\tau_{узз(y)}$ и $\tau_{узз(z)}$) и вторичных касательных напряжений стесненного кручения τ_ω .

$$\tau = \tau_k \pm \tau_{узз(x)} \pm \tau_{узз(y)} \pm \tau_\omega . \quad (1.51)$$

Характерно, что последние три составляющие τ в общем случае симметрично и равномерно распределены по толщине профиля (рис. 1.24) и соответствуют второй формуле в системе (1.35), а первая составляющая, являющаяся чистого кручения - кососимметрично (рис. 1.25) и соответствует третьей формуле (1.35). Остановимся поподробнее на каждой из этих составляющих.

Касательные напряжения от крутящего момента M_k : вычисляются по известной из сопротивления материалов формуле:

$$\tau_k = \frac{M_k \delta}{I_d} . \quad (1.52)$$

Касательные напряжения от перерезывающих сил определяются по формуле, предложенной Д.И. Журавским:

$$\tau_{узз(x)} = \frac{Q_x S_y}{I_y \delta} . \quad (1.53)$$

$$\tau_{изз(y)} = \frac{Q_y S_x}{I_x \delta}.$$

где S_x и S_y статические моменты относительно осей x и y .

Секториальные касательные напряжения от изгибно-крутящего момента:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta}. \quad (1.54)$$

где S_ω - секториальный статический момент, определяемый по формуле (1.23).

Отметим, что все составляющие касательного напряжения (кроме «кососимметричной» составляющей τ_κ) содержат в знаменателе толщину полки δ , являющейся, по сути, коэффициентом пропорциональности, которая берется из формулы, выражающей зависимость между касательным напряжением и сдвигающей силой

$$T = \tau \delta. \quad (1.55)$$

При этом для касательных напряжений, так же как и для нормальных, справедлива оговорка, что знаки слагаемых в уравнении могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от физического их смысла, характеризующегося эпюрами внутренних силовых факторов.

1.3.8. Стержень под действием поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба при различных граничных условиях

Рассмотрим тонкостенный стержень с открытым профилем поперечного сечения, имеющий на концах определенные закрепления. Выберем начало координаты z на левой опоре (рис. 1.26, *a*).

Пусть на стержень в точке $z=t$ действует сосредоточенная поперечная сила P , отстоящая от центра изгиба на расстоянии e . В этом случае стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления при изгибе и кручении. Нагрузка P , будучи перенесена параллельно самой себе в центр изгиба (рис. 1.26, *a*), вызовет в стержне напряжения, определяемые по обычной элементарной теории изгиба. Сосредоточенный же внешний крутящий момент $L_t = Pe$, относящий силу P на заданное расстояние e от центра изгиба (рис. 1.26, *в*), вызовет в стержне дополнительные секториальные

напряжения σ_ω и τ_ω . Опуская расчет стержня на нагрузку, показанную на рис. 1.26б, и вызывающую изгиб стержня по закону плоских сечений, мы рассмотрим здесь расчет стержня на действие сосредоточенного крутящего момента $L_t = Pe$.

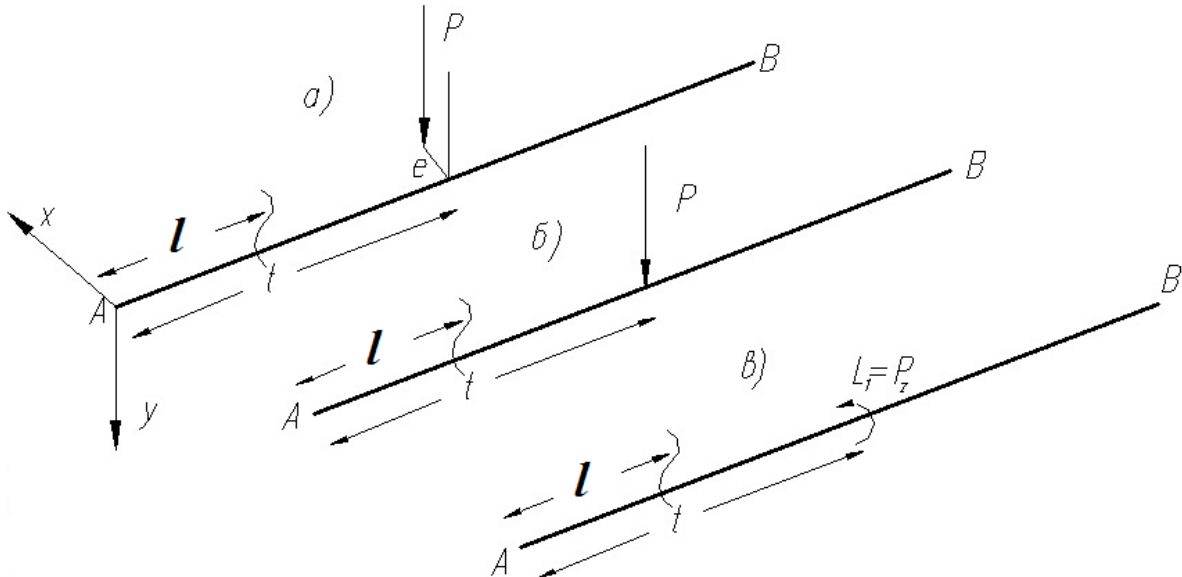


Рис. 1.26. Стержень под действием поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба

Мы будем этот момент считать положительным, если, смотря по направлению отрицательной оси O_z (по рис. 1.26, в от опоры В к опоре А), мы видим, что он вращает стержень по часовой стрелке. Так как в точке $z = t$ из всех четырех факторов θ_t , θ'_t , B_t и L_t приложен только один сосредоточенный фактор $L_t = Pe$, остальные же факторы как "внешние воздействия" в рассматриваемом случае нагрузки отсутствуют, то из формул (1.30) можно получить следующее:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{k} \theta'_0 \operatorname{sh}(kz) - \frac{1}{GI_d} B_0 (\operatorname{ch}(kz) - 1) + \frac{L_0}{GI_d} \left(z - \frac{1}{k} \operatorname{sh}(kz) \right) + \frac{1}{GI_d} Pe \left[z - t - \frac{1}{k} \operatorname{sh}(k(z-t)) \right], \quad (1.56)$$

$$\theta' = \theta'_0 \operatorname{ch}(kz) - k \frac{1}{GI_d} B_0 \operatorname{sh}(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0 (1 - \operatorname{ch}(kz)) + \frac{1}{GI_d} Pe (1 - \operatorname{ch}(k(z-t))), \quad (1.57)$$

$$B = -\frac{1}{k} GI_d \theta'_0 \operatorname{sh}(kz) + B_0 \operatorname{ch}(kz) + \frac{1}{k} L_0 \operatorname{sh}(kz) + \frac{1}{k} Pe \operatorname{sh}(k(z-t)), \quad (1.58)$$

$$L = L_0 + P. \quad (1.59)$$

По этим формулам величины θ , θ' , B и L вычисляются только для сечений, расположенных справа от точки $z = t$, в которой приложен крутящий момент.

Здесь не следует забывать о том, что секториальная EI_ω и сдвиговая GI_d жесткости связаны между собой через изгибно-крутильную характеристику по формуле (1.32) и поэтому здесь и далее формулы для вычисления θ , θ' , B могут быть записаны в различных вариантах, т.е варианты записи этих величин (1.56...1.58) не являются единственными

Для сечений же, расположенных левее точки $z = t$, в формулах (1.56 - 1.59) следует удерживать члены с одними только начальными параметрами θ_0 , θ_0' , B_0 и L_0 .

Граничные условия отражают кинематические ограничения, накладываемые связями, и усилия на краю стержня. В реальных конструкциях кинематические и силовые взаимодействия элементов настолько многообразны, что охватить все случаи практически невозможно. Поэтому, переходя к определению начальных параметров, рассмотрим несколько частных случаев граничных условий.

Стержень, имеющий на концах шарнирные крепления

Под шарнирным креплением стержня (рис. 1.27) мы условимся понимать такое крепление, при котором опорное сечение не имеет угла закручивания (сечение закреплено от поворота относительно оси Oz) и свободно может депланировать из своей плоскости (по сечению отсутствуют секториальные продольные силы).

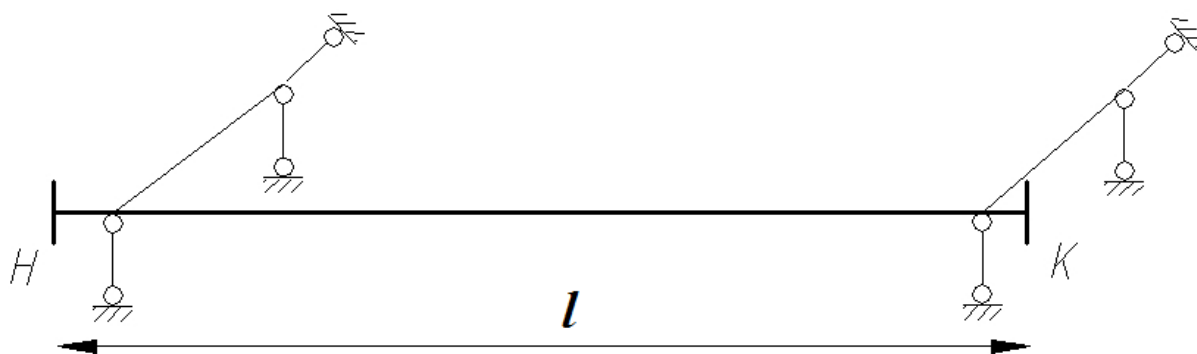


Рис. 1.27. Стержень, имеющий на концах шарнирные крепления
Граничные условия в этом случае будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = 0, \quad 1)\theta = 0; \quad 2)B = 0; \\ \text{при } z = l, \quad 3)\theta = 0; \quad 4)B = 0 \end{array} \right\} . \quad (1.60)$$

Из первых двух условий непосредственно получаем $\theta = 0$ и B_0

Формулы (1.56-1.59) при этих условиях принимают вид:

$$\theta = \frac{1}{k} \theta_0' sh(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0 \left(z - \frac{1}{k} sh(kz) \right) + \frac{1}{GI_d} Pe \left(z - t - \frac{1}{k} sh(k(z-t)) \right), \quad (1.61)$$

$$\theta' = \theta_0' ch(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0 (1 - ch(kz)) + \frac{1}{GI_d} Pe (1 - ch(k(z-t))), \quad (1.62)$$

$$B = -\frac{1}{k} GI_d \theta_0' sh(kz) + \frac{1}{k} L_0 sh(kz) + \frac{1}{k} Pe sh(k(z-t)), \quad (1.63)$$

$$L = L_0 + Pe . \quad (1.64)$$

Полагая в выражениях (1.61 - 1.64) для θ и B координату $z = l$ и имея в виду, что согласно третьему и четвертому условиям (1.60) угол закручивания θ и бимомент B на другом конце стержня при шарнирном устройстве опоры также равны нулю, получим:

$$\frac{1}{k} \theta_0' sh(kl) + \frac{L_0}{GI_d} \left(l - \frac{1}{k} sh(kl) \right) + \frac{Pe}{GI_d} \left[l - t - \frac{1}{k} sh(k(l-t)) \right] = 0, \quad (1.65)$$

$$-\frac{1}{k} GI_d sh(kl) \theta_0' + \frac{1}{k} L_0 sh(kl) + \frac{1}{k} Pe sh(k(l-t)) = 0. \quad (1.66)$$

Решая уравнения (1.65) и (1.66), найдем:

$$\theta_0' = -\frac{1}{l GI_d sh(kl)} [(l-t) sh(kl) - l sh(k(l-t))] Pe, \quad (1.67)$$

$$L_0 = -\frac{l-t}{l} Pe . \quad (1.68)$$

Подставляя теперь данные для θ_0' и L_0 в формулы (1.61-1.64) и имея в виду, что аналитические выражения для изгибно-крутильных факторов на каждом участке будут различные, окончательно получим:

для участка $0 \leq z \leq t$:

$$\theta = \frac{Pe}{kl \cdot GI_d} \left[\frac{l sh(kz) \cdot sh(k(l-t))}{sh(kl)} - kz(l-t) \right], \quad (1.69)$$

$$\theta' = \frac{Pe}{GI_d sh(kl)} \left[ch(kz) \cdot sh(k(l-t)) - \frac{(l-t) sh(kl)}{l} \right], \quad (1.70)$$

$$B = -\frac{Pe}{k} \frac{1}{sh(kl)} sh(kz) sh(k(l-t)), \quad (1.71)$$

$$L_0 = -\frac{l-t}{l} Pe. \quad (1.72)$$

для участка $t \leq z \leq l$

$$\theta = \frac{Pe}{kl \cdot GI_d} \left[\frac{l \cdot sh(kt) \cdot sh(k(l-z))}{sh(kl)} - kz(l-t) \right], \quad (1.73)$$

$$\theta' = \frac{Pe}{GI_d sh(kl)} \left[-sh(kt) \cdot ch(k(l-z)) - \frac{(l-t)sh(kl)}{l} \right], \quad (1.74)$$

$$B = -\frac{Pe}{k} \frac{1}{sh(kl)} sh(kt) sh(k(l-z)), \quad (1.75)$$

$$L_0 = \frac{t}{l} Pe. \quad (1.76)$$

Формулы (1.69-1.76) носят общий характер и позволяют определить кинематические и статические факторы θ , θ' , B и L для любого сечения при любом положении сосредоточенной силы P в пролете. Фиксируя в этих формулах сечение t и давая различные значения. Переменной z , мы можем по формулам (1.66) и (1.67) построить для θ , θ' , B и L эпюры от внешнего сосредоточенного крутящего момента Pe , приложенного в определенном сечении $z = t$. В частности легко подстроить для θ , θ' , B и L эпюры от момента, приложенного в середине пролета. Для этого нужно в формулах (1.69-1.72) считать $t = l/2$

Если в формулах (1.69-1.76) абсциссу z считать постоянной, и абсциссу t – переменной, принимающей в интервале $0 \leq t \leq l$ всевозможные значения, то при этих предположениях формулы (1.69-1.76) выражают собой уравнения линий влияния для перемещений θ и θ' и сил B и L сечения $z = const$ от сосредоточенного крутящего момента Pe , передвигающегося по длине стержня.

Зная секториальные статические факторы B и L , легко затем определить дополнительные нормальные и касательные напряжения от кручения. Эти напряжения вычисляются по формулам (1.44) и (1.51)

Если поперечная нагрузка по длине стержня меняется по величине и положению, но остается постоянной по своему направлению, то интенсивность внешнего крутящего момента в этом случае выражается формулой

$$m = q(t)e(t), \quad (1.77)$$

где $q(t)$ – интенсивность нагрузки,

$e(t)$ – расстояние в сечении z от центра изгиба до этой нагрузки.

Считая поперечную нагрузку $q(t)$ действующей на всей длине стержня, т. е. сплошной, из формул (1.69 - 1.76) получим:

$$\theta(z) = \int_0^z \theta(z, t)m(t)dt + \int_z^l \theta(z, t)m(t)dt, \quad (1.78)$$

$$\theta'(z) = \int_0^z \theta'(z, t)m(t)dt + \int_z^l \theta'(z, t)m(t)dt, \quad (1.79)$$

$$B(z) = \int_0^z B(z, t)m(t)dt + \int_z^l B(z, t)m(t)dt, \quad (1.80)$$

$$L(z) = \int_0^z L(z, t)m(t)dt + \int_z^l L(z, t)m(t)dt. \quad (1.81)$$

Здесь через $\theta(z, t)$, $\theta'(z, t)$, $B(z, t)$ и $L(z, t)$ обозначены функции влияния, определяемые формулами (1.69-1.76) в зависимости от того, на каком участке (по отношению к сечению $z = const$) расположена нагрузка $m(t) = q(t)e(t)$, влияние которой учитывается. Функции влияния, стоящие в первых слагаемых выражений (69), определяются формулами (1.69-1.72); для функций влияния во вторых слагаемых служат формулы (1.73-1.76). Считая в формулах (1.78-1.81) m величиной постоянной, что имеет место (например, в случае $e = const$ и $q = const$), и, выполняя интегрирование, получим формулы для значений θ , θ' , B и L , получающихся в произвольном сечении под влиянием равномерно распределенного внешнего крутящего момента.

Эти формулы имеют следующий вид:

$$\theta = -\frac{m}{k^2 \cdot GI_d} \left[\frac{k^2}{2} z(l-z) + \frac{ch(k(\frac{l}{2} - z))}{ch \frac{kl}{2}} - 1 \right], \quad (1.82)$$

$$\theta' = -\frac{m}{kGI_d} \left[k(\frac{l}{2} - z) - \frac{sh(k(\frac{l}{2} - z))}{ch \frac{kl}{2}} \right], \quad (1.83)$$

$$B = -\frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{ch(k(\frac{l}{2} - z))}{ch \frac{kl}{2}} \right], \quad (1.84)$$

$$L = -m(\frac{l}{2} - z). \quad (1.85)$$

Стержень, концы которого жестко заделаны

Рассмотрим теперь стержень, опорные сечения которого закреплены от перемещений, как в плоскости этого сечения, так и из плоскости. Это значит, что опорные сечения не только не имеют углов закручивания, но также не могут перемещаться из своей плоскости. Граничные условия в этом случае будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z=0, \quad 1)\theta=0; \quad 2)\theta'=0; \\ \text{при } z=l, \quad 3)\theta=0; \quad 4)\theta'=0 \end{array} \right\} \quad (1.86)$$

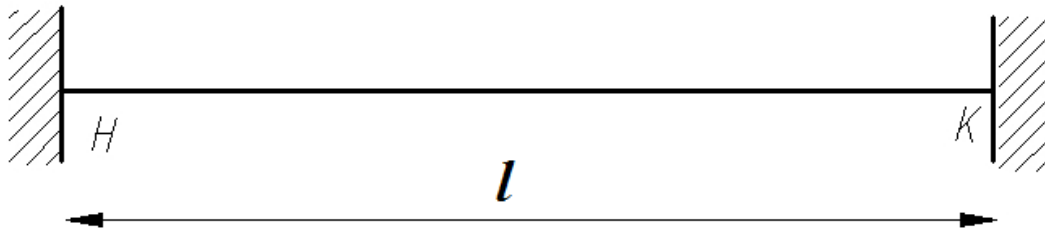


Рис. 1.28. Стержень под действие поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба

Первые два условия дают $\theta_0=0; \theta'_0=0$.

Остальные параметры B_0 и L_0 определяются последними двумя условиями (1.86), относящимися к другому концу стержня. Раскрывая эти условия при помощи общих выражений для θ и θ' , на основании дифференциальных уравнений равновесия (1.30), и принимая во внимание, что $\theta_0=0; \theta'_0=0$, получим:

$$-\frac{1}{GI_d} (ch(kl) - 1)B_0 + \frac{1}{GI_d} L_0 \left(l - \frac{1}{k} sh(kl) \right) + \frac{1}{GI_d} L_t \left[l - t - \frac{1}{k} sh(k(l-t)) \right] = 0, \quad (1.87)$$

$$-\frac{1}{k} \frac{1}{GI_d} sh(kl) B_0 + \frac{1}{GI_d} (1 - sh(kl))L_0 + \frac{1}{GI_d} [1 - ch(k(l-t))]L_t = 0. \quad (1.88)$$

Из этих уравнений находим:

$$B_0 = \frac{t + (l-t)ch(kl) + \frac{1}{k}sh(kt) - \frac{1}{k}sh(kl) + \frac{1}{k}sh(k(l-t)) - lch(k(l-t))}{2ch(kl) - kl \cdot sh(kl) - 2} L_t, \quad (1.89)$$

$$L_0 = \frac{1 + sh(kl) \cdot k(l-t) - ch(kl) + ch(kt) - ch(k(l-t))}{2ch(kl) - kl \cdot sh(kl) - 2} L_t. \quad (1.90)$$

Формулы (1.30) при условиях (1.86) принимают следующий вид:
на участке $0 \leq z \leq t$:

$$\theta = -\frac{1}{GI_d} B_0 (ch(kz) - 1) + \frac{1}{GI_d} L_0 \left(z - \frac{1}{k} sh(kz) \right), \quad (1.91)$$

$$\theta' = -k \frac{1}{GI_d} B_0 sh(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0 (1 - ch(kz)), \quad (1.92)$$

$$B = B_0 ch(kz) + \frac{1}{k} L_0 sh(kz), \quad (1.93)$$

$$L = L_0; \quad (1.94)$$

на участке $t \leq z \leq l$:

$$\theta = -\frac{1}{GI_d} B_0 (ch(kz) - 1) + \frac{1}{GI_d} L_0 \left(z - \frac{1}{k} sh(kz) \right) + \frac{1}{GI_d} L_t \left(z - t - \frac{1}{k} sh(k(l-t)) \right), \quad (1.95)$$

$$\theta' = -k \frac{1}{GI_d} B_0 sh(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0 (1 - ch(kz)) + \frac{1}{GI_d} [1 - ch(k(l-t))] L_t, \quad (1.96)$$

$$B = B_0 ch(kz) + \frac{1}{k} L_0 sh(kz) + \frac{1}{k} L_t sh(k(z-t)), \quad (1.97)$$

$$L = L_0 + L_t. \quad (1.98)$$

Здесь B_0 и L_0 – начальные параметры, зависящие при заданных размерах стержня только от положения крутящего момента по длине стержня. Эти параметры вычисляются по формулам (1.89;1.90).

Рассматривая выражения (1.91-1.98) как функции влияния, мы можем аналогично предыдущему случаю определить изгибно-крутильные факторы от любой сплошной нагрузки.

При равномерно распределенной крутящей нагрузке $m = qe = const$, действующей на всей длине стержня, формулы для перемещений θ и θ' и усилий B и L принимают следующий вид:

$$\theta = \frac{m}{Ek^3 I_\omega} \left[\frac{kz(z-l)}{2} - l \frac{sh \frac{kz}{2} sh \frac{k(z-l)}{2}}{sh \frac{kl}{2}} \right], \quad (1.99)$$

$$\theta' = \frac{m}{Ek^2 I_\omega} \left[z - \frac{l}{2} - \frac{l sh(k(z - \frac{l}{2}))}{2sh \frac{kl}{2}} \right], \quad (1.100)$$

$$B = -\frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{kl}{2} \frac{ch(k(z - \frac{l}{2}))}{sh \frac{kl}{2}} \right], \quad (1.101)$$

$$L = -m \left(\frac{l}{2} - z \right) \quad (1.102)$$

**Стержень, у которого один конец жестко заделан,
а другой – шарнирно закреплен**

Совмещая начальное сечение $z=0$ с заделанным концом стержня, получим

$$\theta_0 = \theta'_0 = 0. \quad (1.103)$$

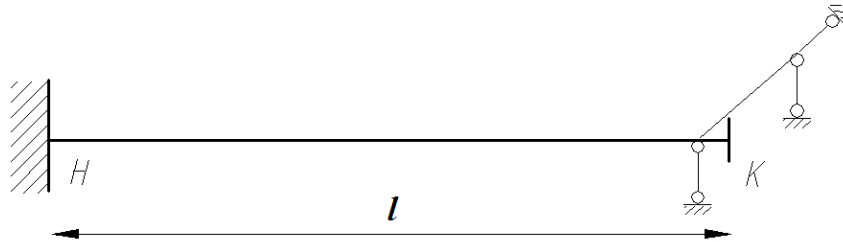


Рис. 1.29. Стержень, у которого один конец жестко заделан, а другой шарнирно закреплен

Остальные два параметра B_0 и L_0 определяются из условий шарнирного закрепления другого конца стержня $z=l$.

Эти условия, как мы видели выше, выражаются отсутствием в опорном сечении угла закручивания θ и изгибно-крутящего бимомента B . Исходя из общего уравнения равновесия (1.30) и принимая во внимание условия (1.82), мы можем условия шарнирного закрепления другого конца стержня представить в таком виде:

$$-\frac{1}{GI_d} (ch(kl) - 1) B_0 + \frac{1}{GI_d} L_0 \left(l - \frac{1}{k} sh(kl) \right) + \frac{1}{GI_d} L_t \left[l - t - \frac{1}{k} sh(k(t-l)) \right] = 0, \quad (1.104)$$

$$ch(kl)B_0 + \frac{1}{k}L_0sh(kl) + \frac{1}{k}L_tsh(k(l-t)) = 0. \quad (1.105)$$

Отсюда находим:

$$B_0 = -\frac{\frac{1}{k}(l-t) \cdot sh(kl) - sh(k(l-t)) \cdot \frac{l}{k}}{\frac{1}{k}sh(kl) - l \cdot ch(kl)} L_t, \quad (1.106)$$

$$L_0 = -\frac{(l-t) \cdot ch(kl) - \frac{1}{k}sh(k(l-t))}{\frac{1}{k}sh(kl) - l \cdot ch(kl)} L_t. \quad (1.107)$$

Решения уравнений (1.30) принимают теперь такой вид:
участок $0 \leq z \leq t$:

$$\theta = -\frac{1}{GI_d} B_0(ch(kz) - 1) + \frac{1}{GI_d} L_0(z - \frac{1}{k}sh(kz)), \quad (1.108)$$

$$\theta' = -k \frac{1}{GI_d} B_0sh(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0(1 - ch(kz)), \quad (1.109)$$

$$B = B_0ch(kz) + \frac{1}{k} L_0sh(kz), \quad (1.110)$$

$$L = L_0; \quad (1.111)$$

участок $z \leq t \leq l$:

$$\theta = -\frac{1}{GI_d} B_0(ch(kz) - 1) + \frac{1}{GI_d} L_0(z - \frac{1}{k}sh(kz)) + \frac{1}{GI_d} L_t \left[z - t - \frac{1}{k}sh(k(z-t)) \right], \quad (1.112)$$

$$\theta' = -k \frac{1}{GI_d} B_0sh(kz) + \frac{1}{GI_d} L_0(1 - ch(kz)) + \frac{1}{GI_d} [1 - ch(k(z-t))] L_t, \quad (1.113)$$

$$B = B_0ch(kz) + \frac{1}{k} L_0sh(kz) + \frac{1}{k} L_tsh(k(z-t)), \quad (1.114)$$

$$L = L_0 + L_t. \quad (1.115)$$

Здесь параметры B_0 и L_0 , как и в предыдущем случае, зависят только от переменной t и вместе с последними членами формул (1.112-1.115) определяют линии влияния для всех кинематических и статических факторов кручения стержня в сечении. Аналогичным образом, как и для свободно

опертого стержня (формулы 1.77...1.81), определяются формулы для би-момента от равномерно распределенной погонной крутящей нагрузки:

$$\theta = \frac{m}{k^3 EI_\omega} \left[sh(k(l-z)) + kz - \frac{1 + kl \cdot sh(kl) - ch(kl) - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \cdot ch(kl) - sh(kl)} \cdot ch(k(l-z)) + \frac{ch(kl) - 1 - \frac{k^2 l^2}{2} ch(kl)}{kl \cdot ch(kl) - sh(kl)} \right], \quad (1.116A)$$

$$B = \frac{m}{k^2} \left[1 - ch(k(l-z)) + sh(k(l-z)) \cdot \frac{1 + kl \cdot sh(kl) - ch(kl) - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \cdot ch(kl) - sh(kl)} \right], \quad (1.116Б)$$

$$L = -m \left(\frac{l}{2} - z \right). \quad (1.116B)$$

Стержень с одним заделанным и другим свободным концом

Совмещая, как и в предыдущем случае, начальное сечение стержня с заделанным концом, получим: $\theta_0 = \theta'_0 = 0$.

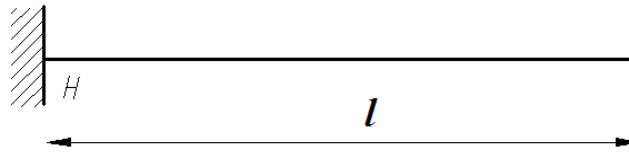


Рис. 1.30. Стержень с одним заделанным и другим свободным концом

Граничные условия для другого конца при отсутствии на этом конце статических факторов (продольных секториальных сил и общего крутящего момента) будут: при $z=l$, $B=0$, $L=0$

Из этих условий, взятых вместе с условиями (87), получаем:

$$B_0 ch(kl) + \frac{1}{k} L_0 sh(kl) + \frac{1}{k} L_t sh(k(l-t)) = 0, \quad (1.117)$$

$$L_0 + L_t = 0. \quad (1.118)$$

Решая эти уравнения, имеем:

$$L_0 = -L_t, \quad (1.119)$$

$$B_0 = -\frac{1}{k} \frac{L_t}{ch(kl)} [sh(k(l-t)) - sh(kl)]. \quad (1.120)$$

Формулы для определения значений θ , θ' , B и L в произвольном сечении $z = const$, обусловленных действием сосредоточенного крутящего момента Pe приложенного также в произвольном сечении $t = const$, в этом

случае по своему виду будут совпадать с вышеприведенными формулами (1.108-1.115), с той только разницей, что параметры B_0 и L_0 определяются по формулам (1.119; 1.120), полученным из условия отсутствия статических факторов на свободном конце стержня.

Статические факторы для случая погонной крутящей нагрузки:

$$\theta' = \frac{m}{Ek^3 I_{\omega} \cdot ch(kl)} [k(l-z) \cdot ch(kz) + sh(kz) - kl \cdot ch(k(l-z))], \quad (1.121A)$$

$$B = -\frac{m}{k^2 \cdot ch(kl)} [kl \cdot sh(k(l-z)) - ch(kl) + ch(kz)], \quad (1.121B)$$

$$L = -mz. \quad (1.121B)$$

Мы рассмотрели здесь четыре типа стержней, отличающихся между собой граничными условиями. Для всех этих типов граничные условия задавались в явном виде, т. е. из четырех изгибно-крутильных факторов двум придавались определенные (нулевые) значения.

Приведенное решение можно легко распространить также и на более общий случай граничных условий, когда эти условия задаются в форме линейных соотношений между статическими и кинематическими факторами. С такими условиями мы встречаемся в случае, когда стержень на концах имеет упругие заделки в соседние элементы. Примером может служить стержень какого-нибудь промежуточного пролета неразрезной балки, упруго заделанный в соседние элементы этой балки. Статические факторы, действующие в опорных сечениях этого стержня, будут пропорциональны соответствующим кинематическим факторам. Коэффициенты пропорциональности определяются из условия совместности продольных секториальных деформаций и углов закручивания в опорных сечениях.

Изложенная техническая теория, построенная на более обобщенных предпосылках, обнаруживает качественно новые эффекты в распределении напряжений по сечению и деформировании тонкостенного стержня открытого профиля. В результате она позволяет прогнозировать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций на более высоком теоретическом уровне. Теоретические разработки Власова В.З. подтверждены многочисленными экспериментами, что позволяет использовать эту теорию для построения инженерной методики расчета тонкостенных стержней открытого профиля.

1.4. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ В XX-XXI ВЕКАХ

В работах Джанелидзе Г.Ю. и Пановко Я.Г. [13] рассмотрены основные уравнения, описывающие статическую работу тонкостенных стержней при условии малых перемещений, прикладная теория Власова В.З. для тонкостенных стержней с открытым профилем и прикладная теория Уманского А.А. для тонкостенных стержней с замкнутым профилем. Проанализированы допущения принятые Власовым В.З. о недеформируемости контура сечения и равенстве нулю деформаций сдвига срединной поверхности стержня с открытым профилем. При рассмотрении вопроса о деформации тонкостенного стержня сделан важный практический вывод о возможности разделения деформаций связанных с кручением стержня и деформаций от изгиба и растяжения. Исследовано влияние на деформации стержня двух близко расположенных, равных по величине и противоположно направленных крутящих моментов. Установлено, что в этом случае действие крутящих моментов на тонкостенный стержень эквивалентно действию бимоментов, равного произведению величины крутящих моментов на расстояние между ними. Выявлено несоблюдение принципа Сен-Венана при действии нагрузок, статически эквивалентных нулю, на тонкостенные стержни открытого профиля, что требует осторожного применения данного принципа при расчете тонкостенных стержней. Рассмотрена возможность кручения тонкостенного стержня относительно оси, не проходящей через центр изгиба сечения и фиксированной конструктивными особенностями конструкции (закрепление профиля на уровне полков, составные стержни, продольная ось которых не проходит через центры изгиба ветвей) и показана необходимость разработки практической методики расчета подобных конструкций. Установлено, что при кручении стержня относительно фиксированной оси, не проходящей через центр изгиба, в нем возникают изгибающие моменты. Представлены упрощенные теории, позволяющие в ряде случаев получать приемлемые с инженерной точки зрения результаты.

Александров В.Г. [13] исследовал работу неразрезных тонкостенных балок с открытым профилем и установил, что при эксцентричном приложении нагрузки от вертикального давления крана напряжения в балке не-

симметричного сечения, из-за стесненного кручения, возрастают до 1,5 раз. При устройстве тормозной балки напряжения в отдельных точках сечения увеличиваются до 1,3 раза, а в некоторых точках сечения меняют знак. Касательные напряжения из-за стесненного кручения в сечении меняются незначительно.

Анучкин А.П. [13] исследует вопросы устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля при сжатии. Установлено, что для неравнобоких уголков форма потери устойчивости практически всегда крутильная. Для швеллеров крутильная форма потери устойчивости возможна, если отношение момента инерции в плоскости стенки к моменту инерции в плоскости полка меньше 8,9. Для двутавров и составных профилей с двумя осями симметрии и полками, направленными внутрь профиля, такая потеря устойчивости возможна, если это соотношение меньше 1,4. Как правило, колонны и стойки двутаврового и швеллерного сечения обычно имеют соотношение моментов инерции соответственно больше 1,4 и 8,9, поэтому расчет их производят без проверки на закручивание. Элементы связей из угловых, тавровых и крестовых профилей должны обязательно проверяться на закручивание.

Бычков Д.В. и Мрощинский А.К. [13] кроме теории кручения тонкостенных стержней открытого профиля приводят методику расчета одно- и многопролетных тонкостенных балок, дают графики, таблицы и формулы для определений усилий при кручении тонкостенных стержней открытого профиля с различными условиями закрепления по концам.

Бычковым Д.В. [13] рассмотрены теория и практические приемы расчета балочных и рамных систем из тонкостенных открытых профилей на кручение. Установлено, что известные из строительной механики методы сил и перемещений расчета балок и рам на изгиб могут применяться и при расчете с учетом стесненного кручения. Автором предложены зависимости и таблицы для определения коэффициентов, используемых при вычислении усилий и перемещений в системе. Введение коэффициентов значительно упростило расчеты тонкостенных стержней с открытым профилем при кручении, создало предпосылку для разработки численной методики расчета. Показано, что в узлах рам выполняется равновесие бимоментов. Бычков Д.В. установил, что для большинства рам угловые и линейные перемещения узлов незначительно влияют на бимоменты и приближенный

расчет можно выполнять без учета этих перемещений. Бимоменты по длине балки затухают значительно быстрее, чем изгибающие моменты, поэтому при расчете неразрезных балок можно ограничиться 4 или даже 3 смежными пролетами, в отличие от 5 при расчете на изгиб. В работе рассмотрены только плоские рамы, высказано предположение, что разработанная методика может быть легко доработана для пространственных систем. Автором необоснованно замечено, что из-за быстрого затухания бимоментов, для сложных пространственных систем учет стесненного кручения не представляет большой важности. Достоинством работы является построение зависимостей и таблиц для расчета простых тонкостенных систем (прямолинейный стержень с различными граничными условиями, плоские рамы), которые можно использовать в практике проектирования. Невозможность использования предложенной методики расчета для пространственных систем ограничивает область применения результатов данного исследования.

Горбунов Б.Н. и Стрельбицкая А.И. [13] основное внимание уделили практическому расчету рам из тонкостенных стержней при действии пространственной нагрузки. Авторами разработаны методы расчета рам с открытым и замкнутым сечениями. При расчете тонкостенных стержней с открытым профилем использована теория Власова В.З., при расчете тонкостенных стержней с замкнутым профилем – теория Уманского А. А. Для расчета рам предложено использовать метод деформаций и метод сил. В качестве параметра характеризующего депланацию стержней введено понятие меры депланации. При расчете рам по методу деформаций используется «метод моторных тензоров», реализующий метод перемещений в матричной форме. Рассматривается построение матриц нагрузки и жесткости, составление системы линейных уравнений для нахождения неизвестных перемещений узлов плоских рам. Общее число неизвестных перемещений в узле, принятое в расчетах, семь: три угловых, три поступательных перемещений и депланация. Основным расчетным случаем являются прямоугольные плоские рамы без эксцентриситетов в узлах при одинаковой, для всех сходящихся в узле, стержней мере депланации. Ось стержня располагается по оси центров изгиба, полки стержней, сходящихся в узле, параллельны плоскости рамы. Фасонки, соединяющие пояса стержней в узле, приняты бесконечно жесткими в своей плоскости и допускающими депла-

нацию из своей плоскости. Установлено, что погрешность, вносимая размерами фасонки, не оказывает значительного влияния на точность расчетов. Авторами показано, что в узлах рам выполняется равновесие бимоментов в узле ($B = 0$). В работе представлены расчеты плоских прямоугольных рам при действии нагрузок, вызывающих кручение и деформацию рам из плоскости. Исследовано влияние на работу рам эксцентриситетов в узлах, вызванных несовпадением центров изгиба и тяжести и невозможностью пересечения в одной точке осей нескольких стержней, соединяемых в узле.

Наличие эксцентриситетов влияет на расчет рам следующим образом:

- усложняется структура матрицы жесткости за счет добавления новых элементов при сохранении общего числа неизвестных;
- линейные перемещения центра узла не совпадают с линейными перемещениями центров тяжести или центров изгиба примыкающих узлов, поэтому для определения усилий в стержнях, после определения перемещений узлов, необходимо определить перемещения концов стержней и по ним определить усилия;
- усложняется уравнение равновесия бимоментов в узле.

В общем случае депланация узла вызывает дополнительные углы поворота и линейные перемещения концов стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу.

К достоинствам данной работы следует отнести разработку методики матричного расчета плоских рам из стержней с полками параллельными плоскости рамы без эксцентриситетов в узлах, постановку вопроса о необходимости учета эксцентриситетов в узлах. Отсутствие данных о построении матрицы жесткости стержневой системы при эксцентриситетах в узлах с произвольной ориентацией стержней, не позволяет напрямую использовать результаты исследований при расчете пространственных стержневых конструкций.

Методика численного расчета разработана Постновым В.А. и Хархуримом И.Я. [13]. Предложен конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля для численного расчета судовых конструкций. Узлы элемента имеют по четыре степени свободы: линейное перемещение, угол поворота, угол закручивания и производную от угла закручивания (депланация). Матрица жесткости элемента имеет размерность 8×8 . Для перехода

из местной в общую систему координат используется матрица преобразования, включающая направляющие косинусы местных осей X' и Y_f относительно общих осей X и Y . Деформация в общей и местной системе координат считается одинаковой. Разработанная матрица может применяться только при расчете плоских перекрытий: сопоставление результатов численных расчетов с известными решениями показали их хорошее соответствие. Использование предложенной матрицы жесткости для расчета пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля (узлы имеют по 7 степеней свободы) с различными узловыми сопряжениями при наличии эксцентриситетов в узлах невозможно.

Г.И. Белым, профессором Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, предложен приближенный аналитический метод расчета тонкостенных стержней по деформированной схеме. Решение основано на аппроксимации пространственных форм деформирования в виде линейной комбинацией частных форм: форм, полученных недеформационным расчетом, и форм потери устойчивости. Физическая нелинейность учитывается введением дополнительных пространственных перемещений сечений стержня.

Этот метод использовался в работах Н.Г. Сотникова, Н.Н. Родикова, С.Н. Пичугина, С.Н. Сергеева, П.А. Пяткина и многих других исследователей.

Исчерпание несущей способности может происходить из-за наступления в процессе нагружения потери местной устойчивости, которая может предшествовать потере общей (пространственной) устойчивости. Изучению вопросов устойчивости пластин посвящены исследования Б.М. Броуде, Е.В. Борисова, Ф. Блейха, Я. Брудки, А.С. Вольмира, И.Б. Ефимова, Э. Стоуэла и других ученых. При действии в сечениях стержня целого комплекса силовых факторов задачи местной устойчивости решаются, как правило, приближенными методами, которые опираются на теорию устойчивости пластинок. Одним из таких методов является метод, основанный на использовании в расчете вместо полного, меньшего (редуцированного) сечения, неэффективные участки которого исключаются из расчета.

1.5. ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.5.1. Классификация методов исследования. Основные положения и известные в практике варианты конечноэлементного анализа тонкостенных стержней открытого профиля

Для решения поставленных задач в научно-исследовательской и проектной работе традиционно используются 3 группы методов исследования:

1. аналитические и полуаналитические;
2. численные;
3. эмпирические.

В указанные группы методов входят следующие (см. схема 1.)

1. классический метод строительной механики;
2. метод, основанный на теории устойчивости С.П. Тимошенко;
3. метод, основанный на технической теории тонкостенных стержней В.З. Власова;
4. метод, предлагаемый в Еврокоде-3;
5. метод конечных элементов (МКЭ), включая экстраполяционный метод оценки точности численных методов, которым является МКЭ (метод Б.С. Шварцмана, базирующийся на методах Ричадсона и Эйткена);
6. эмпирический метод, а именно испытания образцов.

Метод конечных элементов (далее МКЭ) – основной метод современной строительной механики, лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчетов строительных конструкций на ЭВМ. МКЭ также используется для решения других разнообразных задач, как в области прочностных расчетов, так и во многих других сферах, например задачах гидродинамики, электромагнетизма, теплопроводности и многих других.

Метод конечных элементов позволяет практически полностью автоматизировать расчет стержневых систем, хотя, как правило, требует выполнения значительно большего числа вычислительных операций по сравнению с классическими методами строительной механики. Однако в современных условиях большой объем вычислений не является серьезной проблемой, и, в связи с этим, при внедрении ЭВМ в инженерную практику МКЭ получил широчайшее распространение.

Математические основы метода были впервые сформулированы Р.Курантом в 1943г., а термин “конечный элемент” впервые был введен Р.Клафом в 1960 г.

Метод конечных элементов является одним из широко распространенных численных методов и в связи с его автоматизированной постановкой еще и общедоступным.

Расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля может выполняться с использованием конечных элементов двух типов:

1. Оболочечные конечные элементы.

Принцип действия метода конечных элементов применительно к оболочечным схемам аналогичен принципу, описанному в разд.1.3. для стержневых моделей: модель разбивается на узлы и конечные элементы, при этом каждый узел имеет 6 степеней свободы. Вся нагрузка также сводится к шести компонентам для каждого узла, соответствующим шести степеням свободы; составляется матрица жесткости; разрешается глобальная система дифференциальных уравнений, результатом чего являются перемещения по 6 направлениям для каждого узла. После этого происходит переход к напряжениям в каждой точке элемента-пластины (в стержневой модели – к внутренним усилиям, в чем и состоит основное отличие принципа).

Однако применение подобного рода конечных элементов требует, во-первых, тщательного выбора сетки разбиения конструкции и сложности построения модели. А во-вторых, при таком способе число узлов и элементов возрастает по сравнению со стержневой аппроксимацией на несколько порядков, что является основными недостатками модели с такими конечными элементами. Поэтому имеет актуальность использование следующего типа конечных элементов при моделировании.

2. Тонкостенные конечные элементы

Как было показано в главе 1.3., поперечное сечение тонкостенного стержня, в отличие от обычного стержня, имеет не 6, а 7 степеней свободы, характеризующихся соответственно не шестью, а семью степенями свободы. Соответственно теория МКЭ, изложенная в разделе 1.4., не может быть применена к подобного вида стержням и стержневым системам. Иными словами, двухузловой стержневой конечный элемент будет иметь не по 6 степеней свободы в каждом узле, а по 7. Соответственно в матрице жесткости появятся дополнительные компоненты, а в матрицах-столбцах узловых перемещений и узловых нагрузок добавится по одному компоненту на каждый узел: соответственно относительной деформации узла и узлового бимоента.

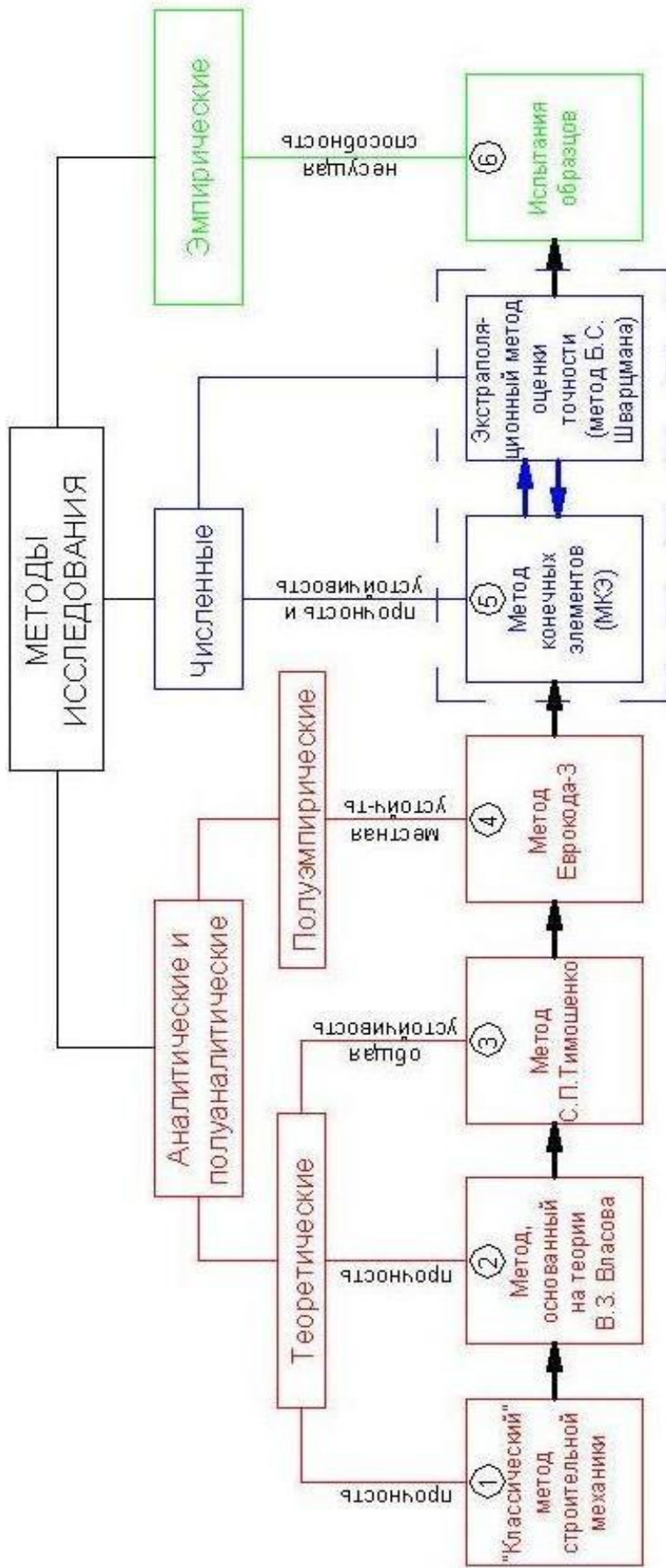


Схема 1. Классификация методов научного исследования применительно к тонкостенным стержням

3. Стержневые конечные элементы

Несмотря на то, что в «классических» стержневых конечноэлементных моделях присутствует не 7, а всего лишь 6 степеней свободы в каждом узле, что, казалось бы, является неприемлемым для расчета тонкостенных стержней открытого профиля, использование обычных стержневых конечных элементов представляется возможным. Это достигается путем построения так называемой *бистержневой модели*, о которой изложено в разделе 1.5.4.

1.5.2. Теоретические основы метода конечных элементов в классической постановке

Основные понятия и определения. Общая схема метода.

В данной главе рассмотрим основные принципы метода конечных элементов¹ на примере случая МКЭ для стержневых систем, поперечное сечение которых имеет три степени свободы, т.е. для плоской стержневой задачи.

В МКЭ стержневая система разбивается на отдельные части – **конечные элементы**, соединяющиеся между собой в **узлах** (рис.1.31).

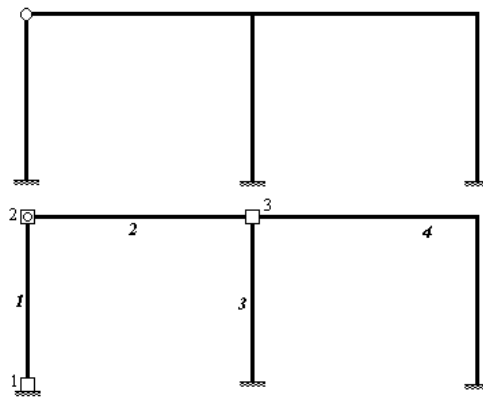


Рис. 1.31. Разбиение системы на узлы и элементы

Узлы могут быть жесткими и шарнирными. Совокупность соединенных между собой и прикрепленных к основанию конечных элементов образует расчетную схему метода, называемую **конечно-элементной схемой** или **конечно-элементной моделью** или просто **системой элементов**. Элементы и узлы конечно-элементной схемы нумеруются.

¹ – методологической основой изложения учебного материала данной главы стало учебное пособие, выпущенное кафедрой «Строительная механика и теория упругости» СПбГПУ как электронный учебник (Автор пособия – к.т.н., доц. М.С.Смирнов)

Внешняя нагрузка считается приложенной только в узлах конечно-элементной схемы. В общем случае переход от заданной нагрузки к узловой осуществляется следующим образом. На основании принципа суперпозиций рассматриваемое состояние стержневой системы может быть представлено как сумма двух состояний (рис.1.32).

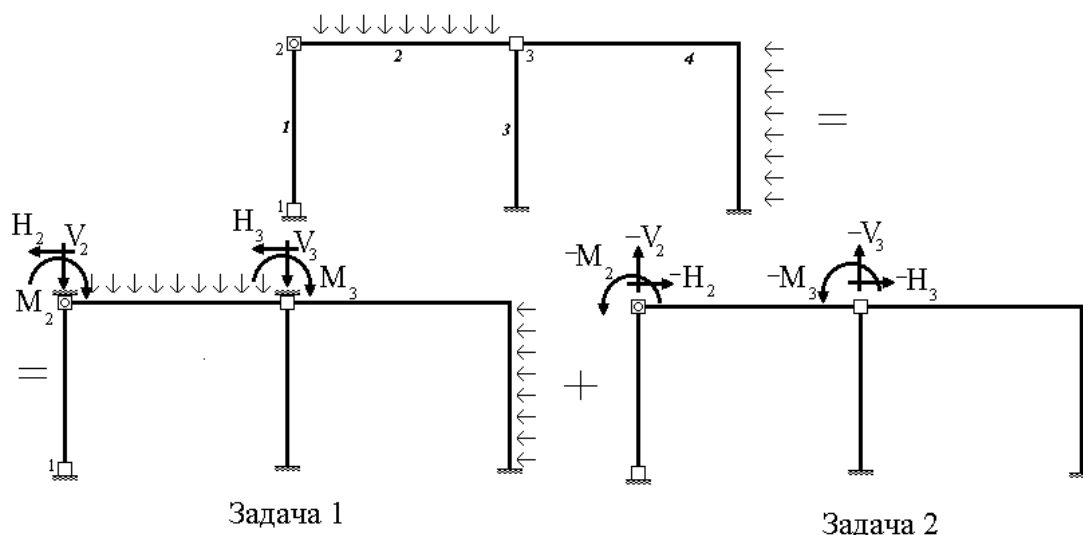


Рис. 1.32. Суперпозиция рассматриваемого состояния системы

В первом состоянии (задача 1) вводятся связи, препятствующие всем возможным смещениям узлов системы, аналогично тому, как образуется основная система в методе перемещений. При этом, однако, продольными деформациями стержней не пренебрегают. От действия заданных нагрузок во введенных связях возникают реакции. Во втором состоянии (задача 2) узлы конечно-элементной схемы не закреплены от смещений, но к ним прикладываются усилия равные по модулю реакциям в связях, определенным в первом состоянии, но противоположные им по направлению (рис.1.32). Расчет системы в первом состоянии не представляет труда. В частности, если конечно-элементная схема создается таким образом, чтобы элементы представляли собой отдельные стержни (элементы 1, 2 и 3 на рис.1.32), то для каждого из таких элементов имеется табличное решение, позволяющее определить реакции в связях и построить эпюры внутренних усилий по их длине. Для расчета же системы во втором состоянии, т.е. для решения задачи 2, и применяется метод конечных элементов. Окончательное решение задачи будет представлять собой сумму решений этих двух задач.

В задаче 2 усилия, действующие на любой элемент, приложены исключительно в узлах. В этом случае перемещения узлов любого элемента, взятого в отдельности (рис.1.33), однозначно определяют усилия и перемещения в любой точке этого элемента. Как известно, для стержневых систем решение такой задачи может быть найдено точно.

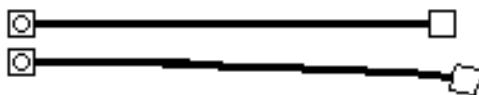


Рис. 1.33. Отдельно взятый конечный элемент в деформированном состоянии

Каждый, взятый отдельно от системы, конечный элемент должен быть достаточно простым, чтобы имелась возможность легко определить перемещения и усилия в любом сечении стержней элемента по заданным перемещениям его узлов. Связь между перемещениями узлов элемента и усилиями в них задается при помощи **матрицы жесткости элемента**. Количество перемещений узлов элемента, которые однозначно определяют состояние данного элемента, называют **числом степеней свободы элемента**.

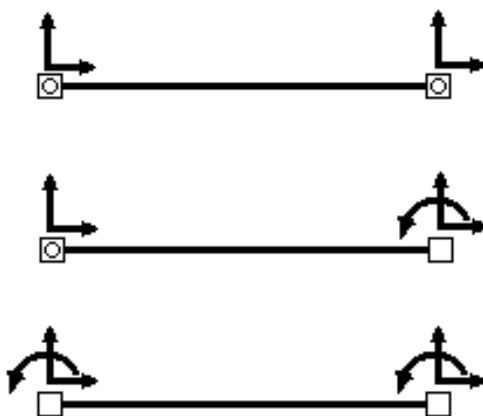


Рис. 1.34. Основные виды стержневых конечных элементов

На рис.1.34 первый элемент характеризуется четырьмя степенями свободы, т.к. он содержит два шарнирных узла. При отсутствии нагрузки, кроме приложенной в самих узлах, положение на плоскости любой точки этого элемента определяется четырьмя параметрами - двумя вертикальными и двумя горизонтальными перемещениями узлов элемента. У второго элемента на рис.1.34 – пять степеней свободы – к четырем линейным смещениям добавляется поворот в одном из узлов. У третьего элемента - шесть степеней свободы, которым соответствуют четыре линейных и два угловых перемещения.

Аналогично, для всей конечно-элементной схемы вводятся **матрица жесткости системы** или **глобальная матрица жесткости**, устанавливающая связь между перемещениями узлов системы и усилиями в них, а также **число степеней свободы системы** или **глобальное число степеней свободы** – количество перемещений узлов системы, которые достаточно знать, чтобы однозначно определить состояние всей системы.

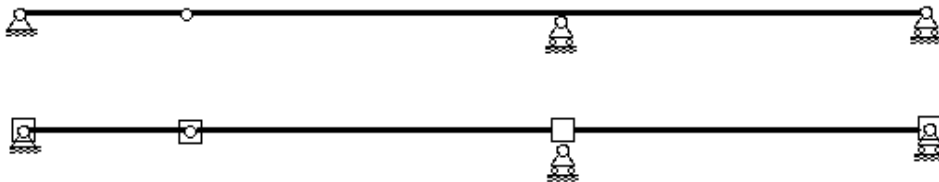


Рис. 1.35. Пример расчетной схемы

Например, в конечно-элементной схеме балки (рис.1.35) используется один жесткий и три шарнирных узла. Следовательно, эта схема характеризуется 9 степенями свободы.

Для всех элементов, из которых состоит конечно-элементная схема, должны быть построены матрицы жесткости элементов. В программных комплексах, реализующих алгоритм метода конечных элементов, хранятся готовые матрицы жесткости для элементов различных типов.

На практике, при расчете плоских стержневых систем используют готовые матрицы жесткости для элементов только трех типов: простых стержней с двумя жесткими узлами, двумя шарнирными узлами, одним жестким и одним шарнирным узлом (рис.1.34). В этом случае при разбивке стержневой системы на элементы узлы вводятся в местах соединения и изломов стержней, в опорах, шарнирах и на свободных концах консольных стержней. В принципе узел может быть введен и в любых других точках, например, в точках приложения сосредоточенных сил.

Из построенных матриц жесткости элементов формируется матрица жесткости системы. Для этого все матрицы жесткости элементов и матрица жесткости системы должны быть сформированы в единой системе осей координат, называемой **глобальной системой осей координат**. При расчете плоских стержневых систем традиционно используется следующая глобальная система осей координат (рис.1.38): ось 1 направлена вправо, ось 2 – вверх, ось 3 – против часовой стрелки.

Матрицы жесткости элементов могут формироваться и храниться в памяти ЭВМ в своих, **локальных системах осей координат**, в общем слу-

чае отличных от глобальной системы осей координат. В данной ситуации при помощи специальной процедуры эти матрицы должны быть перестроены для глобальной системы осей координат.

Так как матрица жесткости системы устанавливает связь между усилиями, приложенными к ее узлам и перемещениями ее узлов, то имея построенную матрицу жесткости системы и зная внешнюю узловую нагрузку, можно найти перемещения всех узлов конечно-элементной схемы. Для этого требуется решить систему линейных алгебраических уравнений. Порядок этой системы равен числу ее степеней свободы.

По известным перемещениям узлов системы для каждого элемента при помощи имеющихся матриц жесткости элементов можно найти внутренние усилия в элементах от действия нагрузки, приложенной в узлах (задача 2). Окончательное решение задачи, как уже упоминалось, ищется как сумма решений задачи 1 и задачи 2.

Таким образом, метод конечных элементов в данном виде аналогичен методу перемещений, так как сначала определяются перемещения узлов системы, а затем по ним – деформации и усилия в стержнях. Возможна реализация метода конечных элементов и в форме метода сил, однако она имеет ряд существенных недостатков и поэтому представляет большей частью чисто научный, но не практический интерес.

Итак, расчет стержневой системы методом конечных элементов в форме метода перемещений состоит из следующих этапов:

- 1) Создание конечно-элементной схемы (разбивка системы на элементы и их нумерация).
- 2) Сведение заданной внешней нагрузки к узловой.
- 3) Формирование матриц жесткости всех элементов системы в локальных системах координат и их преобразование в глобальную систему координат.
- 4) Формирование глобальной матрицы жесткости, системы уравнений метода конечных элементов и ее решение.
- 5) Определение усилий в элементах от действия узловой нагрузки.
- 6) Определение окончательных значений усилий в элементах путем сложения решений задач 1 и 2.

Далее подробнее рассмотрим все эти этапы.

Конечный элемент. Матрица жесткости конечного элемента

Рассмотрим произвольный конечный элемент с числом степеней свободы $n_{ст}$.

Вектором узловых перемещений конечного элемента называется вектор, складывающийся из значений перемещений его узлов по направлению всех его степеней свободы. Очевидно, размерность вектора узловых перемещений равна числу степеней свободы элемента $n_{ст}$.

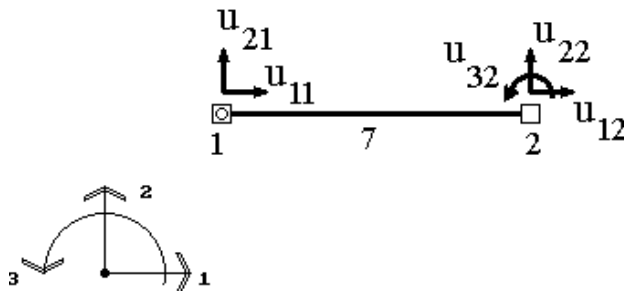


Рис. 1.36. Двухузловой конечный элемент

Например, для двухузлового элемента, имеющего в конечно-элементной схеме номер e , характеризующегося тремя степенями свободы (рис.1.36), вектор узловых перемещений будет иметь следующий вид:

$$U^{(e)} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения: u_{jk} – перемещение узла k по направлению j , $U^{(e)}$ – вектор узловых перемещений узла e . Понятно, что если узел k шарнирный, то j может быть равно 1 или 2. Если же узел k жесткий, то j может быть равно 1, 2 или 3.

Аналогично вводится вектор узловых усилий, действующих на элемент. Его компонентами являются усилия, приложенные к элементу в узлах и действующие по направлению всех его степеней свободы. Для приведенного на рис.1.36 элемента этот вектор будет иметь вид (рис.1.37):

$$R^{(e)} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(e)} \\ r_{21}^{(e)} \\ r_{12}^{(e)} \\ r_{22}^{(e)} \\ r_{32}^{(e)} \end{pmatrix}. \quad (1.122)$$

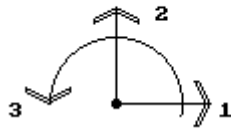
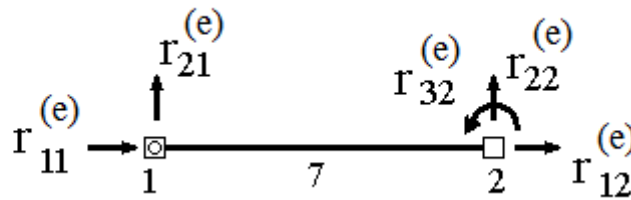


Рис. 1.37. Усилия в двухузловом конечном элементе

Здесь вводятся обозначения: $r_{jk}^{(e)}$ – усилие, действующее на узел k элемента e по направлению j , $R^{(e)}$ – вектор узловых сил, действующих на элемент e .

Вектора $R^{(e)}$ и $U^{(e)}$ являются блочными, т.е. в них можно выделить блоки $R_i^{(e)}$ и U_i соответственно, содержащие усилия и перемещения, относящиеся к i -ому узлу элемента. Если узел i – жесткий, то

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{pmatrix}, \quad (1.123)$$

если шарнирный, то

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix}. \quad (1.124)$$

Аналогично выглядят и блоки вектора $R^{(e)}$.

Например, для рассматриваемого элемента (рис.1.36):

$$R^{(e)} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(e)} \\ r_{21}^{(e)} \\ \text{---} \\ r_{12}^{(e)} \\ r_{22}^{(e)} \\ r_{32}^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{pmatrix}, \quad U^{(e)} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \text{---} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (1.125)$$

Понятно, что при деформировании элемента в результате смещения одного из его узлов по направлению одной из степеней свободы на узлы элемента должны действовать внешние силы, препятствующие возвращению элемента в недеформируемое состояние. Подобная ситуация может возникнуть, например, при неравномерных осадках в опорах статически неопределимой стержневой системы (рис.1.38) – реакции, возникшие в опорах, препятствуют возвращению конструкции в недеформированное состояние. В рамках гипотезы линейного деформирования связь между перемещениями узлов элемента и силами, действующими при этом на него, должна быть линейной. Например, с увеличением смещения δ вдвое, все усилия, действующие на узлы элемента также должны увеличиться вдвое.

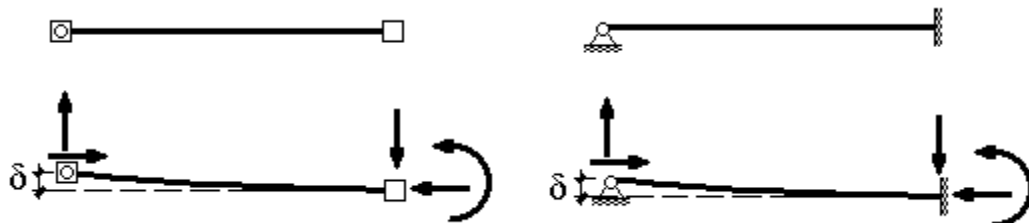


Рис. 1.38. Статически неопределимая стержневая система

Основной характеристикой конечного элемента является матрица жесткости элемента $K^{(e)}$. Она связывает вектор узловых перемещений $U^{(e)}$ и вектор приложенных к элементу узловых усилий $R^{(e)}$ соотношением (1.126), выражающим линейный характер связи между действующими на узлы силами и узловыми перемещениями.

$$R^{(e)} = K^{(e)} \cdot U^{(e)}, \quad (1.126)$$

Матрица жесткости элемента играет роль, аналогичную коэффициенту жесткости пружины K , связывающего приложенное к ней усилие R , и вызванное этим усилием перемещение U соотношением (рис.1.39).

$$R = K \cdot U . \quad (1.127)$$

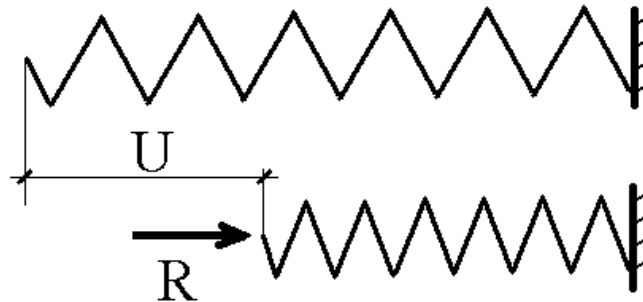


Рис. 1.39. Пружинная интерпретация метода конечных элементов

Поскольку векторы $U^{(e)}$ и $R^{(e)}$ имеют размерность $n_{ст}$, число строк и столбцов в матрице $K^{(e)}$ тоже должно быть равным $n_{ст}$:

$$\underset{n_{cm} \times 1}{R^{(e)}} = \underset{n_{cm} \times n_{cm}}{K^{(e)}} \cdot \underset{n_{cm} \times 1}{U^{(e)}} . \quad (1.128)$$

Введем обозначение $k_{ijmk}^{(e)}$ – усилие, действующее на узел m элемента e по направлению i , от единичного перемещения узла k этого же элемента e по направлению j при условии, что перемещения по направлению всех остальных степеней свободы в элементе равны нулю. Например, $k_{1312}^{(5)}$ – усилие, действующее на узел 1 элемента 5 по направлению 1 при единичном перемещении узла 2 этого же элемента 5 по направлению 3, а $k_{1111}^{(3)}$ – усилие, действующее на узел 1 элемента 3 по направлению 1 от единичного смещения этого же узла по этому же направлению. Последнее значение, как и любое значение $k_{ijij}^{(e)}$ в соответствии с теоремой Клапейрона всегда положительно, аналогично коэффициентам r_{ii} в уравнениях классического метода перемещений.

Важно четко помнить порядок индексов, стоящих при k . Верхний индекс – это номер элемента. Первые два нижних индекса – направления, причем первый из них – номер направления определяемого усилия, а второй – номер направления, в котором произошло единичное перемещение.

Вторые два нижних индекса – номера узлов элемента, причем первый из них – номер узла, в котором определяется усилие, второй - в котором задано единичное перемещение.

Для рассматриваемого элемента (рис.1.36) матрица жесткости элемента имеет следующий вид:

$$K^{(e)} = \begin{pmatrix} k_{1111}^{(e)} & k_{1211}^{(e)} & k_{1112}^{(e)} & k_{1212}^{(e)} & k_{1312}^{(e)} \\ k_{2111}^{(e)} & k_{2211}^{(e)} & k_{2112}^{(e)} & k_{2212}^{(e)} & k_{2312}^{(e)} \\ k_{1121}^{(e)} & k_{1221}^{(e)} & k_{1122}^{(e)} & k_{1222}^{(e)} & k_{1322}^{(e)} \\ k_{2121}^{(e)} & k_{2221}^{(e)} & k_{2122}^{(e)} & k_{2222}^{(e)} & k_{2322}^{(e)} \\ k_{3121}^{(e)} & k_{3221}^{(e)} & k_{3122}^{(e)} & k_{3222}^{(e)} & k_{3322}^{(e)} \end{pmatrix}. \quad (1.129)$$

Легко увидеть, что каждый столбец этой матрицы состоит из усилий, действующих на узлы элемента при единичном смещении по направлению какой-либо из его степеней свободы при условии, что перемещения по направлению остальных степеней свободы равны нулю.

Например, первый столбец представляет собой усилия, действующие на узлы элемента при единичном смещении узла 1 (4-ый индекс при коэффициентах) по направлению 1 (2-ой индекс при коэффициентах) при условии, что перемещения по направлению остальных степеней свободы равны нулю. Второй столбец представляет собой усилия, действующие на узлы элемента при единичном смещении узла 1 (4-ый индекс при коэффициентах) по направлению 2 (2-ой индекс при коэффициентах) при условии, что перемещения по направлению остальных степеней свободы равны нулю. И так далее.

Т.е. компоненты первого столбца матрицы жесткости на самом деле оказались равными компонентам вектора усилий, действующих на узлы элемента при заданном смещении.

Придавая соответствующий вид вектору узловых перемещений, можно выполнить аналогичное доказательство для любого другого столбца матрицы жесткости элемента.

Для рассматриваемого элемента (рис.1.36) запишем матричное равенство (1.126) в развернутом виде:

$$\cdot \begin{pmatrix} r_{11}^{(e)} \\ r_{21}^{(e)} \\ r_{12}^{(e)} \\ r_{22}^{(e)} \\ r_{32}^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1111}^{(e)} & k_{1211}^{(e)} & k_{1112}^{(e)} & k_{1212}^{(e)} & k_{1312}^{(e)} \\ k_{2111}^{(e)} & k_{2211}^{(e)} & k_{2112}^{(e)} & k_{2212}^{(e)} & k_{2312}^{(e)} \\ k_{1121}^{(e)} & k_{1221}^{(e)} & k_{1122}^{(e)} & k_{1222}^{(e)} & k_{1322}^{(e)} \\ k_{2121}^{(e)} & k_{2221}^{(e)} & k_{2122}^{(e)} & k_{2222}^{(e)} & k_{2322}^{(e)} \\ k_{3121}^{(e)} & k_{3221}^{(e)} & k_{3122}^{(e)} & k_{3222}^{(e)} & k_{3322}^{(e)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{31} \end{pmatrix} \quad (1.130)$$

или:

$$\begin{cases} r_{11}^{(e)} = u_{11} \cdot k_{1111}^{(e)} + u_{21} \cdot k_{1211}^{(e)} + u_{12} \cdot k_{1112}^{(e)} + u_{22} \cdot k_{1212}^{(e)} + u_{32} \cdot k_{1312}^{(e)} \\ r_{21}^{(e)} = u_{11} \cdot k_{2111}^{(e)} + u_{21} \cdot k_{2211}^{(e)} + u_{12} \cdot k_{2112}^{(e)} + u_{22} \cdot k_{2212}^{(e)} + u_{32} \cdot k_{2312}^{(e)} \\ r_{12}^{(e)} = u_{11} \cdot k_{1121}^{(e)} + u_{21} \cdot k_{1221}^{(e)} + u_{12} \cdot k_{1122}^{(e)} + u_{22} \cdot k_{1222}^{(e)} + u_{32} \cdot k_{1322}^{(e)} \\ r_{22}^{(e)} = u_{11} \cdot k_{2121}^{(e)} + u_{21} \cdot k_{2221}^{(e)} + u_{12} \cdot k_{2122}^{(e)} + u_{22} \cdot k_{2222}^{(e)} + u_{32} \cdot k_{2322}^{(e)} \\ r_{32}^{(e)} = u_{11} \cdot k_{3121}^{(e)} + u_{21} \cdot k_{3221}^{(e)} + u_{12} \cdot k_{3122}^{(e)} + u_{22} \cdot k_{3222}^{(e)} + u_{32} \cdot k_{3322}^{(e)} \end{cases} \quad (1.131)$$

Физический смысл любого из уравнений данной системы очевиден.

Если узел k элемента e получает по направлению j единичное перемещение, то усилие, действующее при этом на узел m по направлению i равно $k_{ijmk}^{(e)}$.

Если же это перемещение будет равно не единице, а u_{jk} , то в соответствии с линейным законом связи между усилиями и перемещениями, рассматриваемое усилие увеличится также в u_{jk} раз и составит $u_{jk} \cdot k_{ijmk}^{(e)}$.

Формирование и решение системы уравнений МКЭ. Определение внутренних усилий в элементах

Обозначим P_{im} – внешнее усилие, приложенное к узлу m и действующее по направлению i . Введем для каждого из n узлов конечно-элементной схемы вектор внешних узловых усилий, приложенных к узлу m . Если узел m – жесткий, то

$$P_m = \begin{pmatrix} P_{1m} \\ P_{2m} \\ P_{3m} \end{pmatrix}, \quad (1.132)$$

если шарнирный, то

$$P_m = \begin{pmatrix} P_{1m} \\ P_{2m} \end{pmatrix}. \quad (1.133)$$

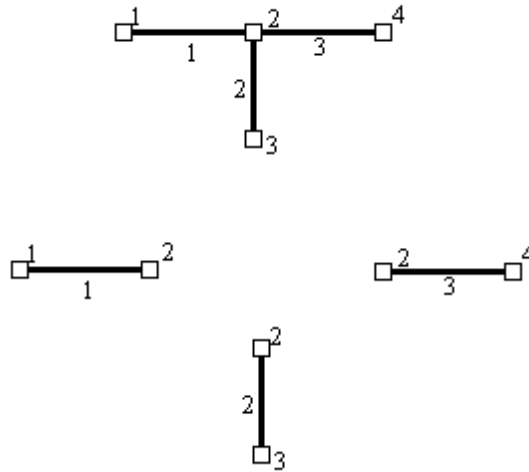


Рис. 1.40. Пример конечноэлементной сетки

Рассмотрим равновесие любого свободного узла (т.е. такого узла, на перемещения которого не наложены связи) конечно-элементной сетки. Пусть это будет узел под номером 2 конечно-элементной сетки, изображенной на рис.1.40. Будем считать пока, что все узлы этой сетки свободны, т.е. на узлы не наложено связей. Об учете связей речь пойдет далее.

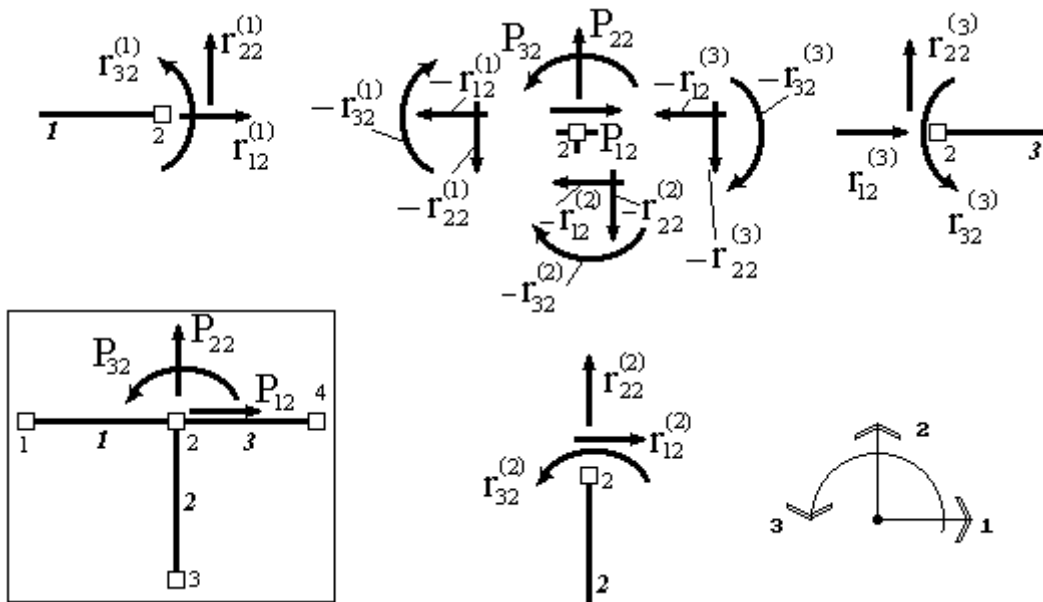


Рис. 1.41. Усилия в узлах конечноэлементной модели

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_3 \end{pmatrix}. \quad (1.134)$$

На узел действует внешняя узловaя нагрузка, характеризующаяся вектором P (1.134), передаваемая на элементы, которые соединяются в этом узле. Пусть это будут три элемента под номерами 1, 2 и 3 (рис.1.40). Усилия, передаваемые на элемент e в узле 2, в соответствии с введенным ранее обозначением образуют вектор $R_2^{(2)}$. Соответственно, со стороны элементов на узел передаются равные, но противоположно направленные усилия. Т.е. со стороны элемента e на узел действует система усилий, образующих вектор $-R_2^{(e)}$. Узел элемента должен находиться в равновесии под действием внешних усилий и усилий, приложенных к узлу со стороны элементов. Следовательно, можно записать:

$$P_2 - R_2^{(1)} - R_2^{(2)} - R_2^{(3)} = 0. \quad (1.135)$$

Следует помнить, что данное равенство – матричное равенство и соответствует системе равенств, каждое из которых представляет собой уравнение равновесия усилий, действующих на узел по одному из направлений. Так как узел 2 – жесткий, это равенство принимает следующий вид (рис.1.41):

$$\begin{cases} P_{12} - r_{12}^{(1)} - r_{12}^{(2)} - r_{12}^{(3)} = 0 \\ P_{22} - r_{22}^{(1)} - r_{22}^{(2)} - r_{22}^{(3)} = 0 \\ P_{32} - r_{32}^{(1)} - r_{32}^{(2)} - r_{32}^{(3)} = 0 \end{cases}. \quad (1.136)$$

В дальнейшем, для упрощения выкладок будем пользоваться матричной формой записи, не раскладывая равенства покомпонентно.

В соответствии с (1.126) для элемента 1 справедливо соотношение

$$R^{(1)} = K^{(1)} \cdot U^{(1)}. \quad (1.137)$$

или

$$\begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (1.138)$$

Из него вектор усилий, действующих на узел 2 со стороны элемента 1, окажется равным

$$R_2^{(1)} = K_{21}^{(1)}U_1 + K_{22}^{(1)}U_2. \quad (1.139)$$

Аналогично, для элемента 2 будем иметь:

$$R^{(2)} = K^{(2)} \cdot U^{(2)}, \quad (1.140)$$

или

$$\begin{pmatrix} R_2^{(2)} \\ R_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{32}^{(2)} \\ K_{23}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}. \quad (1.141)$$

Из него вектор усилий, действующих на узел 2 со стороны элемента 2, окажется равным:

$$R_2^{(2)} = K_{22}^{(2)}U_2 + K_{32}^{(2)}U_3. \quad (1.142)$$

Аналогично, для элемента 3 будем иметь:

$$R^{(3)} = K^{(3)} \cdot U^{(3)}. \quad (1.143)$$

или

$$\begin{pmatrix} R_2^{(3)} \\ R_4^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{22}^{(3)} & K_{42}^{(3)} \\ K_{24}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ U_4 \end{pmatrix}. \quad (1.144)$$

Из него вектор усилий, действующих на узел 2 со стороны элемента 3, окажется равным:

$$R_2^{(3)} = K_{22}^{(3)}U_2 + K_{42}^{(3)}U_4. \quad (1.145)$$

Подставив полученные выражения в (8), получим:

$$P_2 - K_{21}^{(1)}U_1 - K_{22}^{(1)}U_2 - K_{22}^{(2)}U_2 - K_{32}^{(2)}U_3 - K_{22}^{(3)}U_2 - K_{42}^{(3)}U_2 = 0, \quad (1.146)$$

откуда:

$$P_2 - K_{21}^{(1)}U_1 - (K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(3)})U_2 - K_{32}^{(2)}U_3 - K_{42}^{(3)}U_2 = 0. \quad (1.147)$$

Отсюда видно, что в уравнение равновесия для узла входят компоненты матриц жесткости только тех элементов, которые примыкают к этому узлу. Кроме того, в это уравнение входят перемещения только тех узлов, которые принадлежат элементам, примыкающим к рассматриваемому узлу.

Повторив аналогичные операции для всех узлов конечно-элементной схемы, изображенной на рис.1.40, получим:

$$\begin{cases} P_1 - K_{11}^{(1)}U_1 - K_{12}^{(1)}U_2 = 0 \\ P_2 - K_{21}^{(1)}U_1 - (K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(3)})U_2 - K_{23}^{(2)}U_3 - K_{24}^{(3)}U_4 = 0 \\ P_3 - K_{33}^{(2)}U_3 - K_{32}^{(2)}U_2 = 0 \\ P_4 - K_{42}^{(3)}U_2 - K_{44}^{(3)}U_4 = 0 \end{cases}. \quad (1.148)$$

Запишем эту систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(3)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{42}^{(3)} & 0 & K_{24}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}. \quad (1.149)$$

Введем вектор перемещений узлов конечно-элементной сетки U , компонентами которого являются перемещения по направлению всех степеней свободы системы. Очевидно, этот вектор состоит из блоков - векторов перемещений U_i всех n узлов системы:

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}. \quad (1.150)$$

Аналогично, введем вектор внешних узловых усилий P , действующих на конечно-элементную схему. Этот вектор также будет состоять из блоков - векторов усилий P_i , действующих на каждый узел системы:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}. \quad (1.151)$$

Тогда полученная выше система уравнений (1.149) может быть записана в виде:

$$KU=P. \quad (1.152)$$

Зависимость (1.152) устанавливает связь между перемещениями узлов конечно-элементной сетки и приложенными к ним узловыми воздействиями. Зависимость (1.152) аналогична зависимости (1.126), но она построена не для отдельного элемента, а для всей конечно-элементной схемы. Матрица K , как и матрица жесткости элемента, связывает перемещения узлов и приложенные к ним воздействия, но не для одного элемента, а сразу для всей системы. Поэтому ее называют матрицей жесткости конечно-элементной схемы или глобальной матрицей жесткости.

Глобальная матрица жесткости - квадратная матрица, размером равным числу степеней свободы системы, имеющая, как видно из (1.149) блочную структуру.

Из (1.149) легко заключить, что блок K_{ij} глобальной матрицы жесткости формируется из блоков $K_{ij}^{(e)}$ матриц жесткости элементов e , входящих в конечно-элементную схему, причем представляет собой сумму блоков $K_{ij}^{(e)}$ для тех элементов конечно-элементной схемы, в состав которых входит узел i :

$$K_{ij} = \sum K_{ij}^{(e)}, \quad (1.153)$$

где запись $e \in E_i$ и означает, что элемент e должен принадлежать множеству элементов, в состав которых входит узел i .

В системе (1.152) вектор внешних сил P задается, глобальная матрица жесткости K , как мы только что выяснили, формируется из матриц жесткости элементов, входящих в конечно-элементную сетку. Неизвестными в этой системе являются перемещения узлов сетки, составляющие компоненты вектора U .

Таким образом, после построения вектора внешних нагрузок и формирования глобальной матрицы жесткости конечно-элементной схемы перемещения ее узлов определяются посредством решения системы линейных алгебраических уравнений МКЭ (1.152).

Легко показать, что в силу симметрии матриц жесткости элементов и в соответствии с (1.153) глобальная матрица жесткости также будет симметричной.

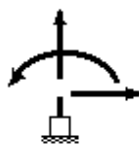


Рис. 1.42. Наложённые ограничения на систему

Если на перемещения какого-либо из узлов конечно-элементной схемы наложены ограничения (рис.1.42), то уравнения равновесия для этого узла теряют смысл. Действительно, все приложенные к этому узлу силы, как внешняя нагрузка, так и усилия, действующие со стороны стержней, будут восприниматься опорными связями. Зато, заранее известны переме-

щения по направлениям закрепленных степеней свободы такого узла. Поэтому, в системе уравнений (1.152) для тех степеней свободы, на которые наложены ограничения, соответствующие уравнения равновесия заменяются уравнениями, в которых перемещениям присваиваются заданные значения.

1.5.3. Метод конечных элементов с использованием тонкостенных конечных элементов

Большой вклад в развитие теории тонкостенных конечных элементов внес Туснин А.Р. [13].

В этой главе (1.5.3) рассмотрим основные положения его теории конечноэлементного моделирования стальных тонкостенных стержней открытого профиля.

«Наиболее рационально для расчета сложных пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля использовать стержневые тонкостенные конечные элементы, учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение при совпадении и несовпадении центров тяжести и изгиба, наличии или отсутствии эксцентриситетов в узлах, что делает актуальным разработку таких конечных элементов.

При использовании метода конечных элементов (МКЭ) конструкция из тонкостенных стержней открытого профиля делится на отдельные прямолинейные тонкостенные конечные элементы (далее ТКЭ), соединяемые друг с другом в узлах. Кроме учитываемых, при расчете обычных стержневых систем, степеней свободы в каждом узле: трех линейных и трех угловых, для конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля учитывается седьмая степень свободы узла – депланации сечения. Таким образом, ТКЭ с узлами в начале и конце имеет 14 степеней свободы.

Расчет конструкции сводится к определению неизвестных перемещений узлов, по которым затем определяются усилия в элементах. Для определения перемещений необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$R_0 U = P, \quad (1.154)$$

где R_0 - матрица жесткости конструкции в общей системе координат с учетом граничных условий; U – вектор перемещений узлов конструкции; P – вектор нагрузки с учетом граничных условий.

Матрица жесткости конструкции R_0 формируется из матриц жесткости отдельных стержней.

Конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля с двумя осями симметрии при отсутствии эксцентриситетов в узлах

Тонкостенные стержни открытого профиля с двумя осями симметрии (сварные и прокатные двутавры) широко используются в пространственных стержневых конструкциях.

Для задач в линейной постановке можно рассматривать перемещения, связанные с изгибом и сжатием стержня отдельно от перемещений вызывающих кручение и деформацию. Таким образом, задача по разработке матрицы жесткости тонкостенного конечного элемента сводится к комбинации известной матрицы жесткости, учитывающей линейные перемещения и углы поворота относительно осей Y_1, Z_1 , с матрицей жесткости, учитывающей угол поворота относительно оси X_1 и деформацию сечения.

Разработка матрицы жесткости тонкостенного конечного элемента основана на теории Власова В.З. [2], описанной в разделе 1.3 настоящего пособия, и имеющей хорошее экспериментальное и теоретическое подтверждение.

Для получения компонентов матрицы жесткости тонкостенного стержня открытого профиля, обусловленных кручением и деформацией, рассмотрим стержень с концами, закрепленными от закручивания и деформации (рис.1.43).

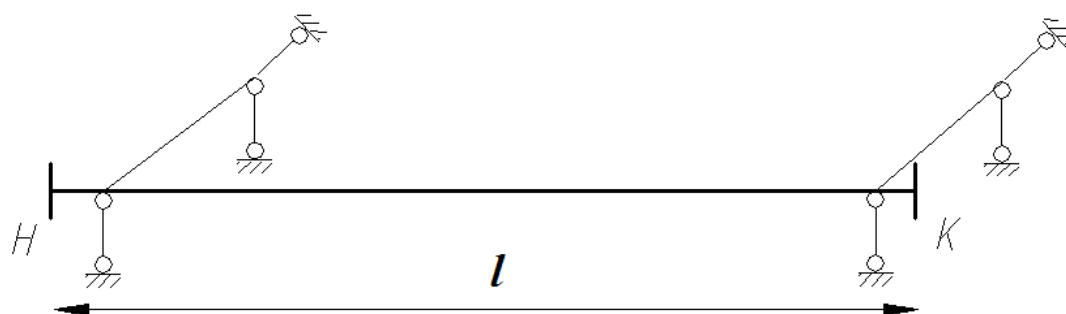


Рис. 1.43 Стержень с концами, закрепленными от закручивания и деформации

Матрица жесткости включает в себя реакции в связях при их возможных единичных перемещениях, в качестве которых, в данном случае, рассматриваются угол поворота относительно продольной оси и деформация

сечения стержня. Угол поворота связи считается положительным, если при взгляде с конца оси XI поворот происходит против часовой стрелки.

Положительной считается депланация, при которой ближайшая к наблюдателю полка поворачивается по часовой стрелке. Положительный крутящий момент в связи направлен так же, как и положительный угол поворота. Положительный бимомент в связях действует так, чтобы при взгляде вдоль плеча бимомента ближайший к наблюдателю момент действовал по часовой стрелке.

С учетом установленных закономерностей в разделе 1.3. матрица жесткости на кручение и депланацию тонкостенного элемента с двумя осями симметрии в местной системе координат имеет вид:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \alpha_1'' & \delta_1'' & \alpha_1^{\kappa} & \delta_1^{\kappa} \\
 \hline
 \alpha_1'' & \frac{\lambda EI_{\omega}}{l^3} & \frac{a EI_{\omega}}{l^2} & -\frac{\lambda EI_{\omega}}{l^3} & \frac{a EI_{\omega}}{l^2} \\
 \delta_1'' & \frac{a EI_{\omega}}{l^2} & \frac{\mu EI_{\omega}}{l} & -\frac{a EI_{\omega}}{l^2} & \frac{g EI_{\omega}}{l} \\
 \alpha_1^{\kappa} & -\frac{\lambda EI_{\omega}}{l^3} & -\frac{a EI_{\omega}}{l^2} & \frac{\lambda EI_{\omega}}{l^3} & -\frac{a EI_{\omega}}{l^2} \\
 \delta_1^{\kappa} & \frac{a EI_{\omega}}{l^2} & \frac{g EI_{\omega}}{l} & -\frac{a EI_{\omega}}{l^2} & \frac{\mu EI_{\omega}}{l}
 \end{array} ,$$

Рис. 1.44 Матрица жесткости на кручение и депланацию

$$\alpha = \frac{k^2 l^2 (ch(kl) - 1)}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, \quad (1.155)$$

$$g = \frac{kl(sh(kl) - kl)}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, \quad (1.156)$$

$$\lambda = \frac{k^3 l^3 sh(kl)}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, \quad (1.157)$$

$$\mu = \frac{kl(kl ch(kl) - sh(kl))}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, \quad (1.158)$$

Комбинация матрицы жесткости от кручения и депланации с известной матрицей жесткости от линейных перемещений и углов поворота относительно осей Y_I, Z_I , позволяет получить матрицу жесткости тонкостенного конечного элемента (ТКЭ), которая имеет размерность 14x14. Компо-

нентами матрицы жесткости являются реакции в связях, возникающие при единичных перемещениях связей. Положительными считаются реакции, направление которых совпадает с положительным направлением соответствующего перемещения. На рис. 1.45 показана структура матрицы жесткости ТКЭ. В незаполненных ячейках матрицы располагаются нули. Матрица жесткости симметрична относительно главной диагонали, поэтому в матрице (рис. 1.45) представлены только элементы, расположенные справа и вверху матрицы жесткости.

	u_1^H	v_1^H	w_1^H	α_1^H	β_1^H	γ_1^H	δ_1^H	u_1^K	v_1^K	w_1^K	α_1^K	β_1^K	γ_1^K	δ_1^K
u_1^H	$r_{1,1}$							$r_{1,8}$						
v_1^H		$r_{2,2}$				$r_{2,6}$			$r_{2,9}$				$r_{2,13}$	
w_1^H			$r_{3,3}$		$r_{3,5}$					$r_{3,10}$		$r_{3,12}$		
α_1^H				$r_{4,4}$			$r_{4,7}$				$r_{4,11}$			$r_{4,14}$
β_1^H					$r_{5,5}$					$r_{5,10}$		$r_{5,12}$		
γ_1^H						$r_{6,6}$			$r_{6,9}$				$r_{6,13}$	
δ_1^H							$r_{7,7}$				$r_{7,11}$			$r_{7,14}$
u_1^K								$r_{8,8}$						
v_1^K									$r_{9,9}$				$r_{9,13}$	
w_1^K										$r_{10,10}$		$r_{10,12}$		
α_1^K											$r_{11,11}$			$r_{11,14}$
β_1^K												$r_{12,12}$		
γ_1^K													$r_{13,13}$	
δ_1^K														$r_{14,14}$

Симметрично относительно
главной диагонали

Рис. 1.45 Матрица жесткости ТКЭ с двумя осями симметрии
Неравные нулю элементы матрицы жесткости равны:

$$\begin{aligned}
r_{1,1} = r_{8,8} &= \frac{EA}{l}, & r_{1,8} &= -\frac{EA}{l}, & r_{2,2} = r_{9,9} &= \frac{12EI_z}{l^3}, & r_{2,6} = r_{2,13} &= \frac{6EI_z}{l^2}, \\
r_{2,9} &= -\frac{12EI_z}{l^3}, & r_{9,13} &= -\frac{6EI_z}{l^2}, & r_{3,3} = r_{10,10} &= \frac{12EI_y}{l^3}, & r_{3,5} = r_{3,12} &= -\frac{6EI_y}{l^2}, \\
r_{3,10} &= -\frac{12EI_y}{l^3}, & r_{10,12} &= \frac{6EI_y}{l^2}, & r_{4,4} = r_{11,11} &= \frac{\lambda EI_\omega}{l^3}, & r_{4,7} = r_{4,14} &= \frac{a EI_\omega}{l^2}, \\
r_{4,11} &= -\frac{\lambda EI_\omega}{l^3}, & r_{11,14} &= -\frac{a EI_\omega}{l^2}, & r_{5,5} = r_{12,12} &= \frac{4EI_y}{l}, & r_{5,10} &= \frac{6EI_y}{l^2}, \\
r_{5,12} &= \frac{2EI_y}{l}, & r_{6,6} = r_{13,13} &= \frac{4EI_z}{l}, & r_{6,9} &= -\frac{6EI_z}{l^2}, & r_{6,13} &= \frac{2EI_z}{l}, \\
r_{7,7} = r_{14,14} &= \frac{\mu EI_\omega}{l}, & r_{7,11} &= -\frac{a EI_\omega}{l^2}, & r_{7,14} &= \frac{g EI_\omega}{l}.
\end{aligned} \tag{1.159}$$

Конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля при несовпадении центров тяжести и изгиба

В практике строительства широко распространены тонкостенные стержни открытого профиля в виде швеллеров, несимметричных двутавров и т.п. Особенностью таких сечений является несовпадение центров тяжести и изгиба, из-за чего при их загрузении поперечными нагрузками, приложенными в центре тяжести, возникают крутящие моменты относительно центра изгиба, а при действии продольных сил, приложенных в центре изгиба, изгибающие моменты относительно осей, проходящих через центр тяжести. Учет дополнительных деформаций стержня, вызванных несовпадением центров тяжести и изгиба, представляет собой важную практическую задачу.

Дифференциальное уравнение, описывающее кручение стержня в этом случае, имеет тот же вид, что и при совпадении центров изгиба и тяжести (рис. 1.45).

Для построения матрицы жесткости в местной системе координат Тусин А.Р. [13] рассматривает произвольный несимметричный профиль (рис. 1.46). Оси X_l, Y_l, Z_l проходят через центр изгиба сечения, который принят за центр узла стержня. Оси X'_l, Y'_l, Z'_l проходят через центр тяжести сечения. Оси X_l и X'_l , параллельные продольной оси элемента, направлены так, чтобы рассматриваемые системы координат были правыми. В качестве местных перемещений концов элемента приняты перемещения относи-

тельно осей координат, проходящих через центр изгиба. Координаты центра тяжести сечения относительно центра изгиба обозначены y и z .

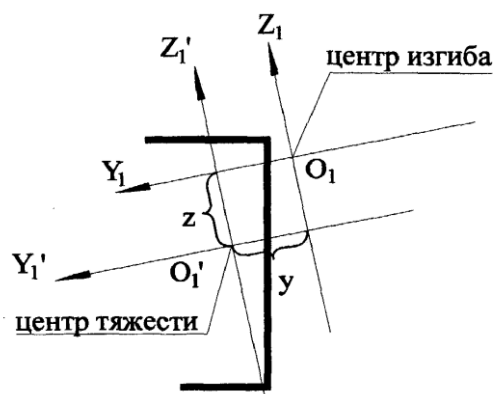


Рис. 1.46. Тонкостенный открытый профиль при несовпадении центров тяжести и изгиба

Из-за несовпадения центров тяжести и изгиба не все перемещения этих точек совпадают. Обозначим возможные перемещения центра изгиба элемента: u_1 – линейное перемещение вдоль оси X_1 ; v_1 – линейное перемещение вдоль оси Y_1 ; w_1 – линейное перемещение вдоль оси Z_1 ; α_1 – угол поворота относительно оси X_1 ; β_1 – угол поворота относительно оси Y_1 ; γ_1 – угол поворота относительно оси Z_1 ; δ_1 – депланация в центре изгиба сечения.

Возможные перемещения центра тяжести сечения обозначим: u_1^I – линейное перемещение вдоль оси X_1^I ; v_1^I – линейное перемещение вдоль оси Y_1^I ; w_1^I – линейное перемещение вдоль оси Z_1^I ; α_1^I – угол поворота относительно оси X_1^I ; β_1^I – угол поворота относительно оси Y_1^I ; γ_1^I – угол поворота относительно оси Z_1^I ; δ_1^I – депланация в центре тяжести сечения.

Перемещения центра тяжести можно выразить через перемещения центра изгиба следующим образом.

Продольное усилие приложено в центре тяжести сечения и относительно центра изгиба (принятого за центр узла элемента) создает дополнительные моменты, равные произведению продольного усилия на координаты центра тяжести относительно центра изгиба.

Матрица жесткости при несовпадении центров тяжести и изгиба в местной системе координат представлена на рис.1.47. Дополнительные элементы и элемент, не совпадающие с элементами матрицы жесткости, пред-

ставленной на рис. 1.47, обозначены в матрице полужирными символами и приведены в формулах (1.160).

	u_1^H	v_1^H	w_1^H	α_1^H	β_1^H	γ_1^H	δ_1^H	u_1^K	v_1^K	w_1^K	α_1^K	β_1^K	γ_1^K	δ_1^K
u_1^H	$r_{1,1}$				$r_{1,5}$	$r_{1,6}$		$r_{1,8}$			$r_{1,11}$	$r_{1,12}$		
v_1^H		$r_{2,2}$				$r_{2,6}$			$r_{2,9}$				$r_{2,13}$	
w_1^H			$r_{3,3}$		$r_{3,5}$					$r_{3,10}$		$r_{3,12}$		
α_1^H				$r_{4,4}$			$r_{4,7}$				$r_{4,11}$			$r_{4,14}$
β_1^H					$r_{5,5}$	$r_{5,6}$		$r_{5,8}$		$r_{5,10}$		$r_{5,12}$	$r_{5,13}$	
γ_1^H						$r_{6,6}$		$r_{6,8}$	$r_{6,9}$			$r_{6,12}$	$r_{6,13}$	
δ_1^H							$r_{7,7}$				$r_{7,11}$			$r_{7,14}$
u_1^K	Симметрично относительно								$r_{8,8}$			$r_{8,12}$	$r_{8,13}$	
v_1^K	главной диагонали									$r_{9,9}$			$r_{9,13}$	
w_1^K										$r_{10,10}$		$r_{10,12}$		
α_1^K											$r_{11,11}$			$r_{11,14}$
β_1^K												$r_{12,12}$	$r_{12,13}$	
γ_1^K													$r_{13,13}$	
δ_1^K														$r_{14,14}$

Рис. 1.47. Матрица жесткости ТКЭ открытого профиля при несовпадении центров тяжести и изгиба

Дополнительные элементы матрицы жесткости равны:

$$\begin{aligned}
 r_{1,5} = r_{8,12} &= \frac{EA}{l} z, & r_{1,6} = r_{8,13} &= -\frac{EA}{l} y, \\
 r_{1,12} = r_{5,8} &= -\frac{EA}{l} z, & r_{1,13} = r_{6,8} &= \frac{EA}{l} y, \\
 r_{5,5} = r_{12,12} &= \frac{4EI_y}{l} + \frac{EA}{l} z^2, & r_{5,6} = r_{12,13} &= -\frac{EA}{l} yz, \\
 r_{5,12} &= \frac{2EI_y}{l} - \frac{EA}{l} z^2, & r_{5,13} = r_{6,12} &= \frac{EA}{l} yz, \\
 r_{6,6} = r_{13,13} &= \frac{4EI_z}{l} + \frac{EA}{l} y^2, & r_{6,13} &= \frac{2EI_z}{l} - \frac{EA}{l} y^2.
 \end{aligned} \tag{1.160}$$

Конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля при наличии в узлах эксцентриситетов

В большинстве стержневых конструкций узловые сопряжения выполняются так, что продольные оси, проходящие через центры тяжести стержней, пересекаются в одной точке, а продольные усилия, действующие в стержнях, не вызывают появления в них изгибающих моментов. Наиболее просто такое сопряжение стержней осуществляется в плоских рамах из профилей одной высоты с двумя осями симметрии. При использовании в плоских рамах профилей разной высоты или несимметричных, а также в пространственных конструкциях между центром узла и центрами тяжести и изгиба примыкающих стержней возможны эксцентриситеты. Из-за этого, перемещения центров тяжести и изгиба не совпадают с перемещениями узлов, продольные усилия, поперечные силы, изгибающие моменты, действующие в стержнях, приводят к появлению дополнительных изгибающих моментов, крутящих моментов и бимоментов.

Чаще всего, при численном расчете стержневых конструкций для моделирования эксцентриситетов используют короткие абсолютно-жесткие стержни, соединяющие центр тяжести стержня с центром узла. Жесткостные характеристики стержней, моделирующих эксцентриситеты, подбираются так, чтобы их погонная жесткость была на 2-3 порядка больше погонной жесткости, рассчитываемого стержня. В конструкциях из стержней сплошного сечения, для которых характерно чистое кручение, использование стержней моделирующих эксцентриситеты позволяет успешно рассчитать перемещения и усилия в системе. Основным недостатком использования моделирующих стержней состоит в усложнении расчетных схем. Для тонкостенных стержней открытого профиля использование моделирующих стержней большой жесткости ведет к тому, что углы поворота центров тяжести и изгиба вокруг поперечных осей совпадают с углами поворота центра узла, тем самым при расчете исключается влияние деформации на углы поворота. Поэтому использование абсолютно-жестких стержней, моделирующих эксцентриситет, не позволяет определять напряженно-деформированное состояние конструкции из тонкостенных стержней с приемлемой для практических целей точностью.

Наиболее просто расчетная схема стержневой конструкции будет выглядеть в том случае, если в местах сопряжения стержней некоторая точка принимается за центр узла. Концы всех примыкающих стержней в этом узле будут иметь номер, равный номеру узла, а конструктивные особенности примыкания конкретного стержня к узлу учитываются матрицей жесткости конечного элемента тонкостенного стержня открытого профиля с эксцентриситетами в узлах.

Рассмотрим симметричный двутавр с эксцентричным закреплением по концам. На рис.1.48 показано расположение местных осей в начале стержня.

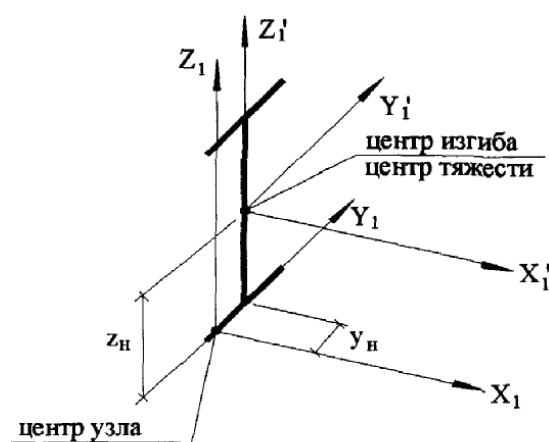


Рис. 1.48. Сечение стержня при наличии в начале стержня эксцентриситетов между центром узла и центрами тяжести и изгиба

Последовательность построения матрицы жесткости тонкостенного стержня открытого профиля с эксцентриситетом в узлах следующая:

1. на центры узлов в начале и конце стержня накладываются связи на все возможные перемещения;
2. в начале стержня центру узла придаются единичные возможные перемещения и определяются перемещения центра тяжести и изгиба в начале стержня.
3. по перемещениям центров тяжести изгиба в начале стержня определяются внутренние усилия в начале и конце стержня;
4. с учетом эксцентриситетов определяются реакции в связях, наложенные на центр узла в начале, и в связях, наложенных на центр узла в конце;
5. в конце стержня центру узла придаются единичные возможные перемещения центров тяжести и изгиба в конце стержня;

6. по перемещениям центров тяжести и изгиба в конце стержня определяются внутренние усилия в начале и конце стержня;

7. с учетом эксцентриситетов определяются реакции в связях, наложенных на центр узла в начале, и в связях, наложенных на центр узла в конце»

Далее Туснин определяет компоненты реакций в связях [13], наложенных на центры узлов стержня. При определении реакций учитывается симметрия матрицы жесткости стержня относительно главной диагонали.

С учетом полученных значений реакций в связях, получена матрица жесткости тонкостенного конечного элемента (ТКЭ) открытого профиля при совпадении центра тяжести с центром изгиба и наличии в узлах эксцентриситетов в местной системе координат (рис.1.49). Дополнительные элементы и элементы матрицы жесткости, не совпадающие с элементами матрицы, представленной на рис. 1.45 выполнены в матрице (рис.1.49) полужирными символами. Матрица жесткости также симметрична относительно главной диагонали.

	u_1^H	v_1^H	w_1^H	α_1^H	β_1^H	γ_1^H	δ_1^H	u_1^K	v_1^K	w_1^K	α_1^K	β_1^K	γ_1^K	δ_1^K
u_1^H	$r_{1,1}$				$r_{1,5}$	$r_{1,6}$	$r_{1,7}$	$r_{1,8}$				$r_{1,12}$	$r_{1,13}$	$r_{1,14}$
v_1^H		$r_{2,2}$		$r_{2,4}$		$r_{2,6}$	$r_{2,7}$		$r_{2,9}$		$r_{2,11}$		$r_{2,13}$	$r_{2,14}$
w_1^H			$r_{3,3}$	$r_{3,4}$	$r_{3,5}$		$r_{3,7}$			$r_{3,10}$	$r_{3,11}$	$r_{3,12}$		$r_{3,14}$
α_1^H				$r_{4,4}$	$r_{4,5}$	$r_{4,6}$	$r_{4,7}$		$r_{4,9}$	$r_{4,10}$	$r_{4,11}$	$r_{4,12}$	$r_{4,13}$	$r_{4,14}$
β_1^H					$r_{5,5}$	$r_{5,6}$	$r_{5,7}$	$r_{5,8}$		$r_{5,10}$	$r_{5,11}$	$r_{5,12}$	$r_{5,13}$	$r_{5,14}$
γ_1^H						$r_{6,6}$	$r_{6,7}$	$r_{6,8}$	$r_{6,9}$		$r_{6,11}$	$r_{6,12}$	$r_{6,13}$	$r_{6,14}$
δ_1^H							$r_{7,7}$	$r_{7,8}$	$r_{7,9}$	$r_{7,10}$	$r_{7,11}$	$r_{7,12}$	$r_{7,13}$	$r_{7,14}$
u_1^K								$r_{8,8}$				$r_{8,12}$	$r_{8,13}$	$r_{8,14}$
v_1^K									$r_{9,9}$		$r_{9,11}$		$r_{9,13}$	$r_{9,14}$
w_1^K										$r_{10,10}$	$r_{10,11}$	$r_{10,12}$		$r_{10,14}$
α_1^K											$r_{11,11}$	$r_{11,12}$	$r_{11,13}$	$r_{11,14}$
β_1^K												$r_{12,12}$	$r_{12,13}$	$r_{12,14}$
γ_1^K													$r_{13,13}$	$r_{13,14}$
δ_1^K														$r_{14,14}$

Симметрично вокруг
главной диагонали

Рис. 1.49. Матрица жесткости ТКЭ при наличии в узлах эксцентриситетов

Дополнительные элементы и элементы матрицы жесткости, не совпадающие с элементами матрицы, представленной матрице (рис. 1.45), равны:

$$\begin{aligned}
 r_{1,5} &= \frac{EA}{l} z_n, & r_{1,6} &= -\frac{EA}{l} y_n, & r_{1,7} &= \frac{EA}{l} \omega_n, & r_{1,12} &= -\frac{EA}{l} z_k, \\
 r_{1,13} &= \frac{EA}{l} y_k, & r_{1,14} &= -\frac{EA}{l} \omega_k, & r_{2,4} &= -\frac{12EI_z}{l^3} z_n, & r_{2,7} &= -\frac{6EI_z}{l^2} z_n, \\
 r_{2,11} &= \frac{12EI_z}{l^3} z_k, & r_{2,14} &= -\frac{6EI_z}{l^2} z_k, & r_{3,4} &= \frac{12EI_y}{l^3} y_n, & r_{3,7} &= \frac{6EI_y}{l^2} y_n, \\
 r_{3,11} &= -\frac{12EI_y}{l^3} y_k, & r_{3,14} &= \frac{6EI_y}{l^2} y_k, & r_{4,4} &= \frac{EI_\omega}{l^3} \lambda + \frac{12EI_y}{l^3} y_n^2 + \frac{12EI_z}{l^3} z_n^2, \\
 r_{4,5} &= -\frac{6EI_y}{l^2} y_n, & r_{4,6} &= -\frac{6EI_z}{l^2} z_n, & r_{4,7} &= \frac{EI_\omega}{l^2} a + \frac{6EI_y}{l^2} y_n^2 + \frac{6EI_z}{l^2} z_n^2,
 \end{aligned} \tag{1.161}$$

Конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля при наличии в узлах эксцентриситетов и несовпадении центров тяжести и изгиба

«При несовпадении центра тяжести и изгиба дополнительных реакций (по сравнению с сечением с двумя осями симметрии при наличии эксцентриситетов в узлах) в связях, наложенных на узлы стержня с эксцентриситетами, не возникает. Однако величины реакций будут другими. Это связано с тем, что перемещения центра изгиба определяют возникновение в стержне поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов, бимоментов. Перемещения центра тяжести по продольной оси определяет возникновение в стержне продольной силы.

На рис.1.50 показан профиль, имеющий несовпадение центров тяжести и изгиба с эксцентричным закреплением в начале и конце. Система координат $X_1 Y_1 Z_1$ связана с центром узла, система координат $X_1' Y_1' Z_1'$ связана с центром изгиба, система координат $X_1'' Y_1'' Z_1''$ связана с центром тяжести.

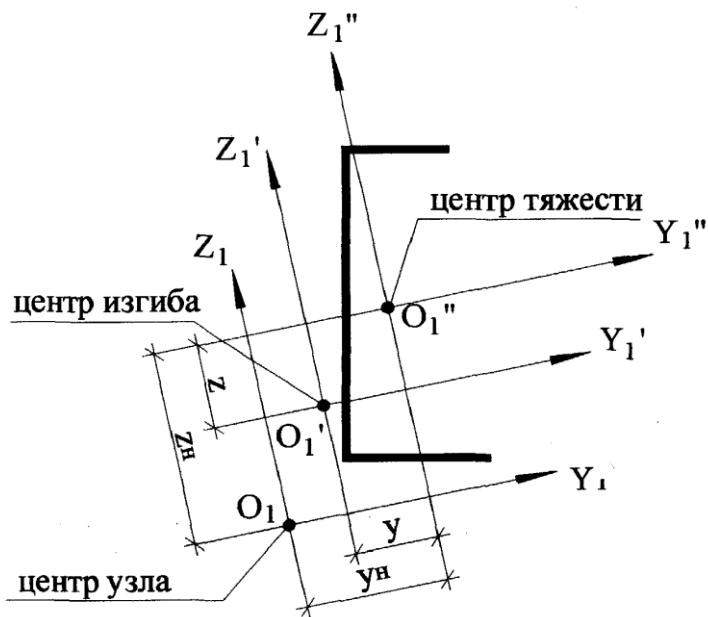


Рис. 1.50. Сечение стержня при наличии эксцентриситетов и несовпадении центров тяжести и изгиба

	u_1^H	v_1^H	w_1^H	α_1^H	β_1^H	γ_1^H	δ_1^H	u_1^K	v_1^K	w_1^K	α_1^K	β_1^K	γ_1^K	δ_1^K
u_1^H	$r_{1,1}$				$r_{1,5}$	$r_{1,6}$	$r_{1,7}$	$r_{1,8}$				$r_{1,12}$	$r_{1,13}$	$r_{1,14}$
v_1^H		$r_{2,2}$		$r_{2,4}$		$r_{2,6}$	$r_{2,7}$		$r_{2,9}$		$r_{2,11}$		$r_{2,13}$	$r_{2,14}$
w_1^H			$r_{3,3}$	$r_{3,4}$	$r_{3,5}$		$r_{3,7}$			$r_{3,10}$	$r_{3,11}$	$r_{3,12}$		$r_{3,14}$
α_1^H				$r_{4,4}$	$r_{4,5}$	$r_{4,4}$	$r_{4,7}$		$r_{4,9}$	$r_{4,10}$	$r_{4,11}$	$r_{4,12}$	$r_{4,13}$	$r_{4,14}$
β_1^H					$r_{5,5}$	$r_{5,6}$	$r_{5,7}$	$r_{5,8}$		$r_{5,10}$	$r_{5,11}$	$r_{5,12}$	$r_{5,13}$	$r_{5,14}$
γ_1^H						$r_{6,6}$	$r_{6,7}$	$r_{6,8}$	$r_{6,9}$		$r_{6,11}$	$r_{6,12}$	$r_{6,13}$	$r_{6,14}$
δ_1^H							$r_{7,7}$	$r_{7,8}$	$r_{7,9}$	$r_{7,10}$	$r_{7,11}$	$r_{7,12}$	$r_{7,13}$	$r_{7,14}$
u_1^K								$r_{8,8}$				$r_{8,12}$	$r_{8,13}$	$r_{8,14}$
v_1^K									$r_{9,9}$		$r_{9,11}$		$r_{9,13}$	$r_{9,14}$
w_1^K										$r_{10,10}$	$r_{10,11}$	$r_{10,12}$		$r_{10,14}$
α_1^K											$r_{11,11}$	$r_{11,12}$	$r_{11,13}$	$r_{11,14}$
β_1^K												$r_{12,12}$	$r_{12,13}$	$r_{12,14}$
γ_1^K													$r_{13,13}$	$r_{13,14}$
δ_1^K														$r_{14,14}$

Симметрично относительно главной диагонали

Рис. 1.51. Матрица жесткости ТКЭ при несовпадении центров тяжести и изгиба и наличии в узлах эксцентриситетов

Дополнительные элементы и элементы матрицы жесткости, отличающиеся от элементов матрицы жесткости, представленной на рис. 1.45. (выполнены в матрице рис. 1.51 полужирными символами) равны:

$$\begin{aligned}
 r_{1,5} &= \frac{EA}{l} z_n, & r_{1,6} &= -\frac{EA}{l} y_n, & r_{1,7} &= \frac{EA}{l} \omega_n, & r_{1,12} &= -\frac{EA}{l} z_k, \\
 r_{1,13} &= \frac{EA}{l} y_k, & r_{1,14} &= -\frac{EA}{l} \omega_k, & r_{2,4} &= -\frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_n, & r_{2,7} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n, \\
 r_{2,11} &= \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_k, & r_{2,14} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k, & r_{3,4} &= \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_n, & r_{3,7} &= \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n, \\
 r_{3,11} &= -\frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_k, & r_{3,14} &= \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k, & r_{4,4} &= \frac{EI_\omega}{l^3} \lambda + \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_n^2 + \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_n^2, \\
 r_{4,5} &= -\frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n, & r_{4,6} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n, & r_{4,7} &= \frac{EI_\omega}{l^2} a + \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n^2 + \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n^2,
 \end{aligned} \tag{1.162}$$

Схема расчета стержневых моделей с помощью тонкостенных конечных элементов

Для расчета пространственных стержневых конструкций разработан вычислительный комплекс СТК (далее ВК СТК), в котором применены представленные выше тонкостенные конечные элементы (ТКЭ), методики построения матрицы жесткости конструкции и определения усилий в элементах. На рис. 1.52 представлена блок-схема вычислительного комплекса.

Для расчета конструкции с использованием ВК СТК необходимо составить расчетную схему из стержней, объединенных в узлах. На расчетной схеме каждый узел и стержень имеет свой номер. Положение узлов в пространстве определяется их координатами. Положение стержней определяется номерами начала и конца стержней, а также ориентацией местной (связанной со стержнем) системы координат. В опорных узлах накладываются связи в соответствии с условиями закрепления рассчитываемой конструкции. Нагрузка прикладывается к узлам в виде сосредоточенных сил, моментов, бимоментов.



Рис. 1.52. Блок-схема вычислительного комплекса

Ввод исходных данных производится в табличном виде, предусмотрена возможность применения повторителей для сокращения вводимой информации. Используется редактор стальных сечений, позволяющий просто задавать геометрические характеристики для ряда сечений. Расчетная схема представляется на экране в графическом виде, показывается нумерация узлов и элементов, действующие нагрузки. Предусмотрена возможность проверки несущей способности стальных стержней в соответствии с требованиями нормативных документов.

Погрешность применения ТКЭ в большинстве случаев составляет до 6-8%, максимальное отличие до 11%[13].»¹

1.5.4. Бистержневая модель тонкостенных конструкций

В книге А.В. Перельмутера и А.И. Сливкера [9] приводится описание так называемой бистержневой модели. Далее приведем небольшую выдержку из данного издания.

¹ – конец цитаты

«Дело в том, что подавляющее большинство расчетных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, позволяют учитывать до 6 степеней свободы в узлах дискретной системы, отвечающих линейным перемещениям и поворотам этих узлов как жестких тел. В то же время, теория тонкостенных стержней открытого профиля требует введения седьмой степени свободы в примыкающих к тонкостенным стержням узлах. Эта седьмая степень свободы отвечает депланирующей составляющей узлового перемещения.

Нашей целью здесь является демонстрация специального приема, позволяющего обойти эти затруднения, не выходя за рамки требований стандартного расчетного программного комплекса, основанного на методе конечных элементов и позволяющего вводить в каждый из узлов расчетной схемы не более 6 степеней свободы. Как будет показано далее, этот прием основан на построении специальной модели, которую мы назовем «бистержневой моделью тонкостенного стержня».

При построении бистержневой модели тонкостенного стержня, оперирующей шестью степенями свободы в узлах, удобно исходить из энергетических соображений. С этой целью приведем выражение для потенциальной энергии деформации E , накапливаемой в тонкостенном стержне при его закручивании. Имеем

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{\omega} (\theta_x'')^2 + GI_x (\theta_x')^2] dx, \quad (1.163)$$

где l – длина стержня.

В качестве предлагаемой бистержневой модели рассмотрим механическую систему, состоящую из двух стержней одинаковой длины l , которые назовем основным и фиктивным стержнями.

Оба эти стержня рассматриваются в классической постановке, то есть в рамках теории Бернулли-Эйлера для стержней сплошного сечения, и поэтому не требуют введения в расчетную схему каких-либо дополнительных степеней свободы.

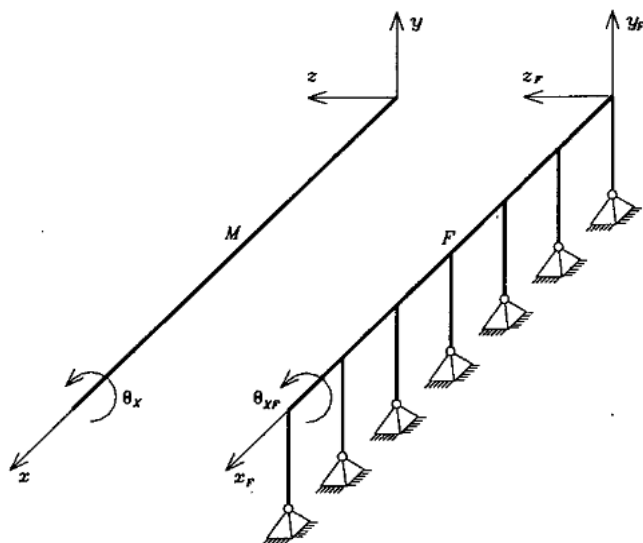


Рис. 1.53. Основной и фиктивный стержни

Пусть (X, Y, Z) – местная система координат основного стержня, а (X_f, Y_f, Z_f) – фиктивного стержня. Оси X и X_f – продольные оси, а пары осей (Y, Z) и (Y_f, Z_f) – главные центральные оси инерции сечений основного и фиктивного стержней (рис. 1.53).

Заметим, что в практических расчетах удобно выбирать ось X_f , идущей параллельно оси X .

Здесь и далее дополнительным нижним индексом F помечаются величины, относящиеся к фиктивному стержню, тогда как аналогичные величины, относящиеся к основному стержню, никакой дополнительной пометкой не оснащаются.

Между перемещениями поперечных сечений стержней (основного и фиктивного) устанавливаем связь, обеспечивающую равенство углов поворотов сечений этих двух стержней относительно осей X и X_f , то есть

$$\theta_x = \theta_{x_f} \quad (1.164)$$

Кроме того, на перемещения фиктивного стержня накладываем внешние связи, препятствующие смещениям точек его продольной оси в осевом направлении (вдоль оси X_f) и в направлении одной из главных осей инерции. Для определенности будем считать, что эта последняя связь препятствует перемещениям по направлению оси Y_f . Линейные перемещения фиктивного стержня вдоль другой главной оси свяжем с углом закручивания θ_{x_f} соотношением

$$\omega_F = r\theta_{xF}, \quad (1.165)$$

где через ω_F обозначено перемещение центра тяжести сечения фиктивного стержня в направлении оси Z_F , r — некоторая константа, которой мы можем распорядиться по своему усмотрению.

Легко заметить, что на механическом уровне наложенные на фиктивный стержень внешние связи интерпретируются как подкрепление фиктивного стержня частотолком абсолютно жестких рычагов (рис. 1.54), направленных вдоль оси Y_F и имеющих длину r . Нижние концы рычагов закреплены от всех линейных перемещений и поворотов вокруг оси Z_F . На рис. 1.54 закрепление от поворотов вокруг оси Z_F не показано, чтобы не затемнять схему.

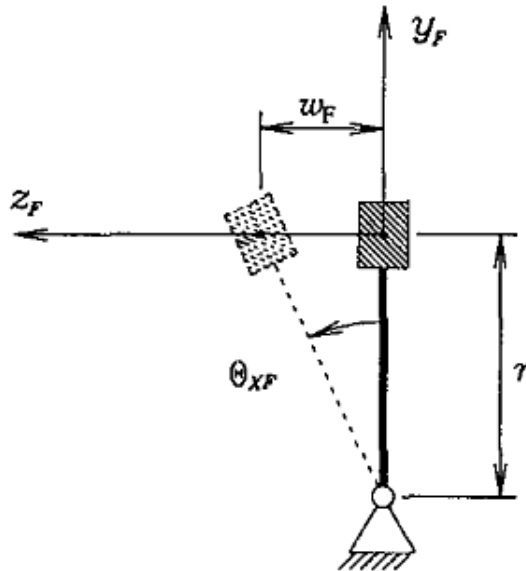


Рис. 1.54. Механизм связи угла поворота и линейного смещения

Из геометрических соображений (рис. 1.54), вытекающих из условия абсолютной жесткости рычагов, немедленно следует равенство (1.156).

Таким образом, при закручивании основного стержня фиктивный стержень, благодаря установленным связям (1.109) и (1.110), получает поперечные перемещения w_F в направлении оси Z_F , вызывающие изгиб этого стержня относительно оси Y_F .

Энергия деформации E в построенной бистержевой модели является суммой энергий, накапливаемых порознь в основном и фиктивном стержнях. Если основной стержень наделить крутильной жесткостью GI , кру-

тельную жесткость фиктивного стержня положить равной нулю, а жесткость фиктивного стержня при изгибе относительно Оси Y_F обозначить EI_{YF} , то энергия деформации E запишется в виде

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{yF} (\omega_F'')^2 + GI_x (\theta_x')^2] dx, \quad (1.166)$$

что полностью совпадает с (1.163). Если учесть соотношения (1.164) и (1.165), а изгибную жесткость фиктивного стержня определить соотношением

$$EI_{yF} = EI_{\omega} / r^2. \quad (1.167)$$

Таким образом, построенная бистержневая модель энергетически эквивалентна исходному тонкостенному стержню.

Покажем теперь, что внутренние силы в фиктивном стержне можно интерпретировать как обобщенные усилия в исходном тонкостенном стержне, возникающие при стесненном кручении.

Действительно, для фиктивного стержня изгибающий момент относительно оси Y_F может быть записан в виде

$$M_{yF} = -EI_{yF} \omega_F''. \quad (1.168)$$

откуда с учетом все тех же зависимостей (1.164), (1.165), (1.167), получаем

$$B = r M_{yF}. \quad (1.169)$$

а изгибно-крутящий момент M_{ω} , в свою очередь, получается дифференцированием бимомента B . Отсюда находим, что

$$Q_{zF} = M'_{yF}. \quad (1.170)$$

Далее, поперечная сила Q_{zF} является производной от момента M_{yF} , то есть

$$M_{\omega} = r Q_{zF}. \quad (1.171)$$

Итак, бимомент B и момент стесненного кручения M_{ω} с точностью до множителя r совпадают соответственно с изгибающим моментом M_{yF} , и поперечной силой Q_{zF} , возникающими в фиктивном стержне. В практических расчетах удобно положить $r = 1$ в принятой системе единиц измерения длин.

Естественно, что при построении дискретной схемы бистержневой модели мы не сможем обеспечить выполнение условий связи (1.164) непрерывно вдоль всей оси X от нуля до 1. Однако, разбив основной стержень по длине на некоторое количество (скажем, n) участков, устанавливаем тем самым на нем $n + 1$ узел, включая начальный и конечный узлы. Пусть это будут узлы $M_1, M_2, \dots, M_{(n+1)}$. Разбивая теперь фиктивный стержень на точно такие же участки, образуем на нем соответствующие узлы $F_1, F_2, \dots, F_{(n+1)}$. Теперь непрерывные условия связи (1.164) можно приближенно заменить дискретными связями, заданными на конечном множестве точек с координатами x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , а именно в $n+1$ узлах основного и фиктивного стержней бистержневой модели. Соответственно и абсолютно жесткие рычаги в системе с дискретными связями сохраняются только в образованных узловых точках.

Может возникнуть вопрос, а куда же в бистержневой системе подевалась седьмая степень свободы узлов тонкостенного стержня? Седьмая степень свободы, связанная с депланацией Θ' , не исчезла бесследно, она лишь внешне изменилась, превратившись Θ_{y_f} . Действительно, для бистержневой модели имеем

$$\theta'_x = \theta'_{x_f} = \omega'_F / r = -\theta_{y_f} / r. \quad (1.172)$$

Однако, если Θ'_x , нельзя напрямую связать с перемещениями узлов как жестких тел, то величина Θ_{y_f} естественным образом интерпретируется как повороты узлов фиктивного стержня относительно оси Y_f . Именно это обстоятельство и позволяет выполнять расчет тонкостенного стержня, оставаясь в рамках ограничений стандартного программного обеспечения, оперирующего конечными элементами с твердотельными узлами.

Если воспользоваться программой SCAD, то для задания связей вида

$$\theta_x(x_i) = \theta_{x_f}(x_i). \quad (1.173)$$

гарантирующих равенство углов поворота соответствующих узлов основного и фиктивного стержней, имеется заложенный в эту программу специальный инструмент «объединение перемещений», реализованный в графической среде этой системы.

Кстати говоря, для введения в расчетную схему абсолютно жестких рычагов, присоединенных к узлам фиктивного стержня, удобно, воспользо-

зоваться такой возможностью расчетной программы, как задание эксцентриситетов в прикреплении стержня к узлам (бесконечно жестких вставок). В этом случае узлы фиктивного стержня F , будут располагаться не вдоль центроидной линии (линии центров тяжести поперечных сечений) фиктивного стержня, а вдоль линии, соединяющей нижние концы рычагов.

Если в используемой программе заложена возможность задания смещения оси центров сдвига относительно центроидной оси стержня, то можно в исходной информации к задаче опустить задание эксцентриситетов, описывающих рычаги, и заменить их заданием величины $e_{yF} = r$, где e_{yF} – смещение оси центров сдвига фиктивного стержня относительно его центроидной оси.»¹

1.5.5. Экстраполяционные методы оценки точности метода конечных элементов

Метод конечных элементов, являясь одним из численных методов, в общем случае способен выдавать лишь приближенные результаты. И точность этих результатов зачастую зависит от геометрии и количества конечных элементов при заданном их типе. И в связи с этим очень важно правильно разбить расчетную модель на конечные элементы, для чего определить наиболее оптимальный шаг разбиения, от которого будет зависеть конечный результат.

В этой главе рассмотрим методы оценки точности метода конечных элементов. Все эти методы сами по своей сути являются экстраполяционными, и для их реализации требуется анализ модели при нескольких шагах разбиения, связанных между собой определенными математическими зависимостями. Стоит отметить, что область их применения охватывает не только метод конечных элементов, но и любой численный метод решения математических задач.

Для подробного изучения данного вопроса лучше воспользоваться учебным пособием В.В. Лалина и Г.С. Колосовой [8], в котором экстраполяционным методам посвящен целый раздел.

Ниже приведем краткую, но емкую, выдержку из данного пособия с комментариями авторов для общего понимания материала.

¹ – конец цитаты

«Метод Ричардсона»

Итак, в каждой задаче, решаемой с помощью МКЭ можно выделить 2 типа решений: приближенное решение, непосредственно получаемое в результате расчета $\overline{U}(x_i)$ и точное решение задачи $U(x_i)$.

В вычислительной математике эти два решения связаны следующей зависимостью:

$$\left|U(x_i) - \overline{U}(x_i)\right| = Ch^k, \quad (1.174)$$

где C – определенная константа для каждой конкретной задачи; h – шаг разбиения модели на конечные элементы (максимальный размер конечного элемента); k – порядок точности численного метода, в нашем случае – метода конечных элементов, значение которого является натуральным числом.

Для применения метода Ричардсона необходимо знать величину порядка точности метода k и провести решение задачи на двух сетках: с шагами h_n , и $h_{n+1} = h_n/2$. И при двух последовательных измерениях $n+1$ и $n+2$ получаются два значения искомой величины, равные соответственно z_{n+1} и z_{n+2} .

В [8] доказывается, что

$$z_{n+2} = z_\tau + (z_{n+1} - z_\tau)^{\frac{1}{2^k}} + O(h_n^m), \quad (1.175)$$

Откуда

$$z_\tau = R_n + O(h_n^m), \quad (1.176)$$

где введено обозначение

$$R_n = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{2^k - 1}. \quad (1.177)$$

Последняя формула и есть формула Ричардсона. Формула (1.176) показывает, что порядок точности величины R_n равен m , что выше ($m > k$), чем порядок точности исходного метода. Из нее видно, что величина R_n , будет, вообще говоря, ближе к точному решению z_τ , чем каждая из величин z_{n+1} и z_{n+2} , входящих в формулу (1.177).

Аналогично формуле (1.174) следует

$$|z_\tau - R_n| \leq c h_n^m. \quad (1.178)$$

Наличие в последней формуле неопределенной постоянной c , по-прежнему, не позволяет и в методе Ричардсона получить конкретную величину погрешности.

Метод Эйткена

Для применения метода Эйткена нет необходимости знать теоретическую величину порядка точности метода k , но, в отличие от метода Ричардсона, необходимо провести решение задачи на трех последовательных сетках с шагами $h_n, h_{n+1} \equiv h_n / 2, h_{n+2} \equiv h_{n+1} / 2$.

В [14] также доказывается, что точное решение также равно:

$$z_\tau = \frac{z_n z_{n+2} - z_{n+1}^2}{z_{n+2} + z_n - 2z_{n+1}} + O(h_n^m). \quad (1.179)$$

Легко проверить тождество:

$$\frac{z_n z_{n+2} - z_{n+1}^2}{z_{n+2} + z_n - 2z_{n+1}} = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{D_n - 1}. \quad (1.180)$$

где D_n определено формулой (1.181).

$$D_n = (z_{n+1} - z_n) / (z_{n+2} - z_{n+1}). \quad (1.181)$$

Окончательно формулу (1.179) можно записать в виде

$$z_\tau = A_n + O(h_n^m). \quad (1.182)$$

Здесь введено обозначение:

$$A_n = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{D_n - 1}. \quad (1.183)$$

Последняя формула и называется формулой Эйткена.

Формула (1.182) показывает, что порядок точности величины A_n равен m , что выше, чем порядок точности исходного метода. Следовательно, как и в методе Ричардсона, величина A_n будет, вообще говоря, ближе к точному решению z_τ , чем каждая из величин z_n, z_{n+1}, z_{n+2} , входящих в формулу (1.183).

Отметим, что формулы Ричардсона (1.177) и Эйткена (1.183) отличаются лишь одним слагаемым в знаменателе. И в связи с этим доказано, что обе формулы будут давать близкие результаты.

Из формулы (1.182) следует, что

$$|z_T - A_n| \leq ch_n^m \quad (1.184)$$

Поэтому, как и в методе Рундсона, получить конкретную величину погрешности в методе Эйткена невозможно из-за наличия неопределенной постоянной C .

Метод Шварцмана

Проблема получения конкретной (без неопределенных постоянных) величины погрешности приближенного решения тесно связана с проблемой получения двусторонних оценок точного решения.

Действительно, пусть в результате вычислений получены величины a и b такие, что выполняются неравенства

$$a \leq z_T \leq b \quad (1.185)$$

Если в качестве окончательного приближенного решения взять полу-сумму

$$Z_T \approx \frac{A_n + R_n}{2} \quad (1.186)$$

то очевидно, что максимальная величина погрешности будет равна половине длины отрезка $[a, b]$, т.е. будут выполняться неравенства

$$e = |z_T - S| \leq \frac{1}{2}(a + b), \quad (1.187)$$

где e – абсолютная погрешность.

Знак равенства в (1.187) будет достигаться, если точное решение z_T совпадает с одной из границ отрезка $[a, b]$, т.е. выполняется равенство $z_T = a$ или $z_T = b$

С учетом изложенного становится понятным фундаментальное значение следующей теоремы [8].

Теорема Шварцмана. Если последовательность

$$D_n = (z_{n+1} - z_n)/(z_{n+2} - z_{n+1}), \quad (1.188)$$

монотонно сходится к 2^k , то точное решение Z_T принадлежит отрезку, определяемому величинами R_n и A_n (соответственно (1.177) и (1.183)),

т. е. справедливы неравенства

$$\min(A_n, R_n) \leq z_T \leq \max(A_n, R_n), \quad (1.189)$$

где

$$\min(a, b) \begin{cases} a, & a < b \\ b, & b \leq a \end{cases} \quad \max(a, b) \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & b > a \end{cases} \quad (1.190)$$

Как показано выше, из (1.191) следует, что, если в качестве окончательного приближенного ответа взять

$$S_n = \frac{1}{2}(A_n + R_n) \quad (1.191)$$

то справедлива следующая оценка погрешности:

$$e = |z_T - S_n| \leq \frac{(A_n - R_n)}{2} \quad (1.192)$$

Формулы (1.191), (1.192) и представляют суть метода Шварцмана.

Подчеркнем, что оценка погрешности (1.192) не содержит неопределенных постоянных, в отличие от оценок погрешности в методах Ричардсона и Эйткена.

Существенное значение имеет тот факт, что метод Шварцмана не связан с конкретным численным методом, например, с методом конечных элементов.

Его можно применять и при выполнении расчетов другими численными методами, например, методом конечных разностей. Для применения метода Шварцмана также не существенно, какая исходная задача решается. Это может быть не только краевая задача, но и задача Коши, задача вычисления определенного интеграла и другие.

При практических вычислениях не всегда бывает удобно сгущать сетку в целое число раз. В целях экономии вычислительной работы может потребоваться сгущать сетку в нецелое число раз, т.е. использовать вложенные сетки, шаги которых связаны соотношением

$$h_n = h_n / \lambda, \quad (1.193)$$

где коэффициент сгущения λ – любое число ($\lambda > 1$).

Еще более общий случай: рассматривать геометрически подобные сетки, коэффициент сгущения которых λ_n может меняться от расчета к расчету. Шаги таких сеток связаны соотношением

$$h_{n+1} = \frac{h_n}{\lambda_n}, \quad \lambda_n > 1 \quad (1.194)$$

Оказывается, метод Шварцмана с незначительным усложнением можно распространить и на эти случаи.

Не останавливаясь на подробных доказательствах, изложим алгоритм метода для наиболее общего случая геометрически подобных сеток.

Предварительно обратим внимание на то, что для всех сгущаемых сеток точка области, где требуется уточнять решение по методу Шварцмана, должна входить в число узловых точек.

Итак, пусть исходная задача решена три раза каким-то методом на сетках с шагами:

$$h_n, h_{n+1} = \frac{h_n}{\lambda_n}, h_{n+2} = \frac{h_{n+1}}{\lambda_{n+1}}. \quad (1.195)$$

Пусть z_n, z_{n+1}, z_{n+2} – соответствующие приближенные решения в какой-то точке области, z_T – неизвестное точное решение в этой точке. Опуская малые слагаемые, запишем приближенные равенства, которые следуют из разложения, представленного в [14]:

$$z_n \approx z_T + \alpha h_{n+1}^k \lambda_n^k \quad (1.196)$$

$$z_{n+1} \approx z_T + \alpha h_{n+1}^k \quad (1.197)$$

$$z_{n+2} \approx z_T + \alpha \frac{h_{n+1}^k}{\lambda_{n+1}^k} \quad (1.198)$$

Исключая из формул (3.42) и (3.43) множитель αh_{n+1}^k , получим

$$z_T \approx z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{\lambda_{n+1}^k - 1} \quad (1.199)$$

Формула (1.200) является обобщением формулы Ричардсона на случай геометрически подобных сеток.

$$T_n = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{\lambda_{n+1}^k - 1} \quad (1.200)$$

Исключая из формул (1.196) - (1.198) z_T и αh_{n+1}^k имеем

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+2} - z_{n+1}} \approx \lambda_{n+1}^k \frac{\lambda_n^k - 1}{\lambda_{n+1}^k - 1} \quad (1.201)$$

На основе последней формулы введем понятие эффективного порядка сходимости [27]. Эффективным порядком сходимости ω_n будем называть решение уравнения:

$$\lambda_{n+1}^{\omega_n} \frac{\lambda_n^{\omega_n} - 1}{\lambda_{n+1}^{\omega_n} - 1} = D_n \quad (1.202)$$

где использовано обозначение (1.181).

Доказано, что справедливо свойство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = k \quad (1.203)$$

Используя определение (1.202), из формул (1.196) - (1.198) можно получить

$$z_T \approx z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{\lambda_{n+1}^{\omega_n} - 1} \quad (1.204)$$

Формула (1.205) является обобщением формулы Эйткена на случай геометрически подобных сеток.

$$B_n = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{\lambda_{n+1}^{\omega_n} - 1} \quad (1.205)$$

В пособии [8] доказана теорема: если ω_n монотонно сходится к k , то формулы (1.200) и (1.205) дают двусторонние оценки точного решения:

$$\min(T_n, B_n) \leq z_T \leq \max(T_n, B_n) \quad (1.206)$$

Отсюда получаем, что для приближенного решения (1.207) справедлива оценка погрешности (1.208):

$$S_n = \frac{T_n + B_n}{2} \quad (1.207)$$

$$|S_n - z_T| \leq \frac{|T_n - B_n|}{2} \quad (1.208)$$

Таким образом, метод Шварцмана при использовании геометрически подобных сеток дополнительно требует на каждом шаге решения нелинейного уравнения (1.202). Как показывает практика, для его решения достаточно 3-5 итераций, например, по методу Ньютона. Отметим еще, что при использовании вложенных сеток, когда $\lambda_n = \lambda = const$, уравнение (1.202) сводится к виду

$$\lambda^{\omega_n} = D_n \quad (1.209)$$

и его решение дается аналитической формулой

$$\omega_n = \ln D_n / \ln \lambda \quad (1.210)$$

В заключение главы изложим метод Шварцмана при необходимости получения не абсолютной погрешности приближенного решения (1.208), а относительной погрешности приближенного решения z_n , которую выразим следующей формулой:

$$\sigma_n = \left| \frac{z_T - z_n}{z_T} \right| \quad (1.211)$$

Введем обозначения:

$$\Delta T_n = \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{\lambda_{n+1}^k - 1} \quad (1.212)$$

$$\Delta B_n = \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{\lambda_{n+1}^{\omega_n} - 1} \quad (1.213)$$

$$\sigma_{T_n} = \left| \frac{\Delta T_n}{T_n} \right|, \quad \sigma_{B_n} = \left| \frac{\Delta B_n}{B_n} \right| \quad (1.214)$$

В пособии [8] доказана теорема: если ω_n монотонно сходится к k , то формулы (1.214) дают двусторонние оценки относительной погрешности σ_n (1.211):

$$\min(\sigma_{T_n}, \sigma_{B_n}) \leq \sigma_{n+2} \leq \max(\sigma_{T_n}, \sigma_{B_n}) \quad (1.215)$$

Приведем последнюю теорему для случая применения постоянного коэффициента измельчения сетки $\lambda = 2$. Необходимо вычислить величины

$$\Delta R_n = \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{2^k - 1} \quad (1.216)$$

$$\Delta A_n = \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{D_n - 1} \quad (1.217)$$

$$\sigma_{R_n} = \left| \frac{\Delta R_n}{R_n} \right|, \quad \sigma_{A_n} = \left| \frac{\Delta A_n}{A_n} \right| \quad (1.218)$$

Следует отметить, что достоинством такого выбора сетки заключается в том, не требуется решать сложное нелинейное уравнение

В этом случае теорема Шварцмана утверждает, что

$$\min(\sigma_{R_n}, \sigma_{A_n}) \leq \sigma_{n+2} \leq \max(\sigma_{R_n}, \sigma_{A_n}) \quad (1.219)$$

где σ_n – относительная погрешность (1.211).»¹

1.6. ТРЕБОВАНИЯ СОВРЕМЕННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ НОРМ, ПРАВИЛ И РЕКОМЕНДАЦИЙ

В настоящее время в России наиболее известны четыре нормативно-методических источника, казалось бы, регламентирующих методику расчета стальных тонкостенных холодногнутых профилей или хотя бы дающих общее представление о том, как их рассчитывать:

- СНиП II-23-81* «Стальные конструкции»; а также Пособие, являющееся приложением этим СНиП;
- Свод правил по проектированию и строительству «Общие правила проектирования стальных конструкций», разработанный несколько лет назад и базирующийся на «старом» СНиП;
- Рекомендации Э.Л. Айрумяна по проектированию, изготовлению и монтажу конструкций каркаса малоэтажных зданий и мансард из холодногнутых стальных оцинкованных профилей производства конструкций [1];

¹ – конец цитаты

- Еврокод 3 «Проектирование стальных конструкций», в котором непосредственно к тонкостенным холодногнутым профилям имеют отношение 4 части: часть 1-1, часть 1-3, часть 1-5 и часть 1-8.

Остановимся поподробнее на каждом из них.

1.6.1. Требования действующих строительных норм

Как в действующем СНиП II-23-81* «Стальные конструкции», так и в пособии к нему о деформации и бимоменте как дополнительном внутреннем силовом факторе говорится очень мало. В СНиП II-23-81* «Стальные конструкции» в качестве внутренних усилий выступают только продольная и поперечная силы, а также изгибающий и крутящий моменты.

Все предлагаемые формулы в этой связи касаются лишь проверки на устойчивость, а не на прочность. В частности, приводится сложная формула, описывающая изгибо-крутильную форму потери устойчивости.

Но это устойчивость. А теория устойчивости и теория прочности уже в изначальном своем подходе принципиально отличаются друг от друга. В основе классической теории устойчивости лежит так называемый «эйлеров» подход, базирующийся на отыскании некой критической силы, характеризующей переход элемента в некую новую форму равновесия (неустойчивую), а вовсе не соответствующей максимально допустимым усилиям или напряжениям, взятым из прочностных характеристик материала.

Иными словами, стержень может потерять устойчивость, не набрав и половины своей прочности, и наоборот, будучи в упругой стадии работы, может потерять устойчивость.

В СНиП II-23-81* «Стальные конструкции» сказано, что «в балках, рассчитываемых в пределах упругих деформаций, необходимо проверять прочность стенки при сложном напряженном состоянии путем определения обобщенного напряжения на основе энергетической теории прочности».

В комментариях к соответствующей формуле

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq 1,15R_y \gamma_c, \quad (1.220)$$

где описывается «природа» составляющих тензора напряжений, не упоминается, что часть этих составляющих (как нормальную, так и касательную)

может быть обусловлена не только поперечной силой и изгибающим моментом, но еще и крутящим и изгибно-крутящим моментами, а также би-моментом, что немаловажно.

То есть, учитывать вышеизложенные факторы или не учитывать, остается на усмотрение инженера-проектировщика.

В то же время в нескольких главах СНиПа много говорится о расчетах на локальные нагрузки, на местную устойчивость стенок и полок, расстановке ребер жесткости и пр. Понятно, что постановка ребер жесткости, если не исключит, то существенно уменьшит деформацию. Но мы рассматриваем тот теоретический случай, когда ребра жесткости в конструкции не предусматриваются.

В новом Своде Правил (СП 53-102-2004, Общие правила проектирования стальных конструкций) также нет никаких рекомендаций по расчету на прочность с учетом деформации.

1.6.2. Расчет тонкостенных конструкций по методике Э.Л. Айрумяна

В мировой строительной практике холодногнутые профили из оцинкованной стали широко применяются для несущих и ограждающих конструкций зданий и сооружений различного назначения.

Отечественными фирмами-производителями, осуществляющими массовое производство холодногнутых профилей, разработана номенклатура из нескольких типов таких профилей. Эти профили применяются для выполнения каркасов малоэтажных зданий, мансард и навесов.

Работа этих конструкций под нагрузкой имеет следующие особенности:

- возможность потери местной устойчивости полок и стенок профилей при продольном сжатии, если соотношение их ширины и толщины превышает 60;
- изгибаемые и сжатые профили несимметричного сечения работают с кручением;
- сплошные профили обладают значительной теплопроводностью и могут быть «мостиками холода» в ограждающих конструкциях.

В 2004 году под руководством заведующего лабораторией холодноформованных профилей и конструкций «ЦНИИПСК им. Мельникова» Э.Л. Айрумяна были разработаны рекомендации по проектированию, изготов-

лению и монтажу конструкций каркаса малоэтажных зданий и мансард из холодногнутох стальных оцинкованных профилей производства конструкций. Основные положения расчета приведем ниже.

Расчет элементов на осевые силы и изгиб

Расчет на прочность элементов из профилей на центральное растяжение или сжатие N следует выполнять по формуле:

при растяжении

$$\frac{N}{F_p} \leq R_y \gamma_c \quad (1.221)$$

при сжатии

$$\frac{N}{F_c} \leq R_y \gamma_c, \quad (1.222)$$

где $\gamma_c=0,75$ – коэффициент условий работы;

F_p – полная площадь сечения профиля;

F_c – редуцированная площадь сечения профиля.

Расчет на устойчивость элементов, подверженных центральному сжатию силой N , следует выполнять по формуле:

$$\frac{N}{\varphi F_c} \leq R_y \gamma_c \quad (1.223)$$

Значения φ следует определять в зависимости от гибкости.

$$\lambda = \frac{l_{ef}}{r_{\min}} \quad (1.224)$$

по табл. 72 СНиП II-23-81, где l_{ef} – расчетная длина;

Расчет на устойчивость балок двутаврового сечения из спаренных профилей, изгибаемых в плоскости стенки, следует выполнять по формуле

$$\frac{M}{\varphi_B W_c} \leq 0,8 R_y \quad (1.225)$$

где W_c – следует определять для сжатого пояса, но не более чем для ширины равной $40t$.

φ_B – коэффициент, определяемый по прил. 7 СНиП II-23-81.

Расчет на устойчивость балок швеллерного и С-образного сечения следует выполнять как для балок двутаврового сечения в зависимости от параметра α и коэффициента φ_1 , принимая моменты инерции сечения по табл. 2-6.

$$\alpha = 1,54 \frac{I_t}{I_y} \left(\frac{l_{ef}}{h} \right)^2 \quad (1.226)$$

$$\varphi_1 = 0,7\psi \frac{I_y}{I_x} \left(\frac{h}{l_{ef}} \right)^2 \frac{E}{R_y} \quad (1.227)$$

где l_{ef} и h – расчетная длина и высота сечения балки;

b_{pi} – расчетная ширина каждой грани сечения балки.

Значения ψ принимаются по таблицам 77 и 78 СНиП II-23-81 в зависимости от характера нагрузки и параметра α .

Значение коэффициента φ_B необходимо принимать

$$\text{при } \varphi_1 \leq 0,85 \quad \varphi_B = \varphi_1 \quad (1.228)$$

$$\text{при } \varphi_1 > 0,85 \quad \varphi_B = 0,68 + 0,21\varphi_1, \text{ но не более } 1,0.$$

Устойчивость балок не требуется проверять при передаче нагрузки через сплошной деревянный или металлический настил, непрерывно опирающийся на сжатый пояс балки и надежно с ним связанный. Закрепление сжатого пояса в горизонтальной плоскости должно быть рассчитано на фактическую поперечную силу.

Расчет на прочность элементов, изгибаемых в двух главных плоскостях, следует выполнять по формуле:

$$\frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \leq 0,8R_y \quad (1.229)$$

где x и y – координаты рассматриваемой точки сечения относительно главных осей;

I_x и I_y – моменты инерции профилей.

Для стенок балок должны выполняться следующие условия:

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq 0,9R_y \quad (1.230)$$

$$\tau_{xy} \leq 0,8R_s \quad (1.231)$$

где

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{I_x t} \quad (1.232)$$

Расчет на прочность внецентренно – сжатых и сжато изгибаемых элементов выполнять не требуется при значении приведенного эксцентриситета $m_{ef} \leq 20$.

В прочих случаях расчет следует выполнять по формуле

$$\frac{N}{F_c} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \leq 0,75R_y \quad (1.233)$$

Расчет на устойчивость внецентренно-сжатых и сжато-изогнутых элементов из профилей выполняется в плоскости действия момента по формуле:

$$\frac{N}{\varphi_1 \sum F_c} \leq R_y \gamma_c \quad (1.234)$$

где F_c – редуцированная площадь профиля.

Коэффициент φ_1 определяется как для сплошностенчатых стержней по табл. 74 СНиП II-23-81 в зависимости от условной гибкости $\bar{\lambda}$ и приведенного относительного эксцентриситета m_{ef} определяемого по формуле:

$$m_{ef} = \eta m \quad (1.235)$$

где

$$\eta = (1,9 - 0,1m) - 0,02(6 - m)\bar{\lambda} \quad (1.236)$$

$$m = \frac{eF_c}{W_x} \quad (1.237)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}} \quad (1.238)$$

Здесь e – эксцентриситет.

Проверка устойчивости стенок и полок изгибаемых и сжатых элементов

Стенки изгибаемых элементов для обеспечения их устойчивости следует укреплять поперечными ребрами, поставленными на всю высоту стенки.

Расстояние между поперечными ребрами не должно превышать $3h_{ef}$, где h_{ef} – расстояние между краями выкружек стенки профиля.

Расчет на устойчивость стенок изгибаемых элементов двутаврового сечения из спаренных швеллеров, укрепленных поперечными ребрами жесткости, при отсутствии местного напряжения и условной гибкости $\bar{\lambda} \leq 6$ следует выполнять по формуле:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2} \leq 0,8, \quad (1.239)$$

где

$$\sigma_{cr} = \frac{30R_y}{\lambda^2} \quad (1.240)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h_{ef}}{t} \sqrt{\frac{R_y}{F}} \quad (1.241)$$

Расчет на устойчивость стенок изгибаемых элементов (кроме перфорированных профилей), не укрепленных поперечными ребрами, под местной нагрузкой или на опорах, следует выполнять по формуле:

$$P_n = Ct^2 R_y \sin \alpha (1 - C_r \sqrt{\frac{r}{t}}) \cdot (1 + C_b \sqrt{\frac{b}{t}}) \cdot (1 - C_h \sqrt{\frac{h}{t}}) \quad (1.242)$$

где P_n – критическая нагрузка потери местной устойчивости стенки профиля без перфорации;

C – коэффициент по табл. 1.2;

C_r – коэффициент, зависящий от радиуса изгиба $r \leq 12$;

C_b – коэффициент, зависящий от ширины опоры «в» при $b \geq 19$ мм.;

C_h – коэффициент, зависящий от гибкости стенки, равной $h/t \leq 200$;

α – угол между стенкой и плоскостью опоры, $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Коэффициент надежности для определения силы P_n принимается равным 0,8.

Таблица 1.2

Условия на опорах	Условия приложения нагрузки на профиль		C	C_r	C_b	C_n	Примечание
Профиль закреплен на опоре	Нагрузка (реакция) на одну полку профиля	Крайняя опора	4	0,14	0,35	0,02	$r/t \leq 9$

		Средняя опора	13	0,23	0,14	0,01	$r / t \leq 5$
	Нагрузка (реакция) на две полки профиля	Крайняя опора	7,5	0,08	0,12	0,048	$r / t \leq 12$
		Средняя опора	20	0,1	0,08	0,031	$r / t \leq 12$
Профиль не закреплен на опоре	Нагрузка или реакция на одну полку профиля	Крайняя опора	4	0,14	0,35	0,02	$r / t \leq 5$
		Средняя опора	13	0,23	0,14	0,01	
	То же на две полки профиля	Крайняя опора	13	0,32	0,05	0,04	$r / t \leq 3$
		Средняя опора	24	0,52	0,15	0,001	

Если изгибаемый элемент состоит из двух и более профилей, критическая нагрузка смятия его стенки на опорах определяется как $n \cdot P_n$, где n – количество профилей.

Расчетную ширину сжатых полок b_{ef} при проверке устойчивости следует принимать равной расстоянию от края выкружки стенки до края полки или выкружки окаймляющего ребра при условии, что

$$\bar{\lambda}_p \leq 0,673 \quad (1.243)$$

где

$$\bar{\lambda}_p = 1,052 \frac{b_{ef}}{t} \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{Ek_1}} \quad (1.244)$$

σ_{\max} – максимальное напряжение в полке;

k_1 – коэффициент, зависящий от граничных условий на продольных краях полки;

$k_1=4$ – для полок с окаймляющим ребром, высотой не менее $0,3b_{ef}$.

При $\bar{\lambda}_p > 0,673$ расчетную ширину сжатых полок и стенок следует определять с учетом местной потери устойчивости по формуле:

$$b_{ef1} = \rho b_{ef} \quad (1.245)$$

где ρ – редуцированный коэффициент равный

$$\rho=1 \text{ при } \bar{\lambda}_p \leq 0,673 \quad (1.246)$$

$$\rho = \frac{1 - \frac{0,22}{\lambda_p}}{\lambda_p} \text{ при } \bar{\lambda}_p > 0,673 \quad (1.247)$$

1.7. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

До сих пор мы рассматривали вопрос несущей способности стальных тонкостенных стержневых элементов лишь с точки зрения напряженно-деформированного состояния, предполагая, что рассматриваемые элементы находятся в состоянии равновесия.

Однако аналитическими и экспериментальными исследованиями, проводимыми на протяжении XX и начала XXI веков, неоднократно устанавливалось для различных моделей, что конструкция, не достигнув своего предела прочности, может изменить характер деформации (например, сжимаемый стержень при достижении сжимающей силы определенного значения, может выйти из какой-либо плоскости и начать изгибаться в плоскости, ей перпендикулярной, рис. 1.55а).

Такой переход из одного вида деформации в другой в строительной механике называется потерей устойчивости.

Данный вопрос в пособии изложен достаточно коротко.

В параграфах 1.7.1...1.7.3 рассмотрим лишь основные понятия и предпосылки теории устойчивости тонкостенных стержней, необходимые для осознания процесса потери их общей устойчивости (по В.З. Власову), а в параграфах 1.7.4...1.7.5. – основные понятия теории местной устойчивости, потеря которой, как показывает практика, является наиболее вероятной в изгибаемых и сжатых тонкостенных профилях.

1.7.1. Понятие устойчивости равновесия упругой системы. Критическая сила

Термин "устойчивость" используется практически во всех областях естествознания. Устойчивость

- движения планет, космических кораблей, ракет и самолетов;
- электронных оболочек атома;

- ламинарного течения жидкости;
- высокотемпературной плазмы;
- биологической клетки;
- системы автоматического регулирования и энергетических систем.

Этот далеко не полный перечень показывает, как широк диапазон применения понятия устойчивости.

В строительной механике тонкостенных конструкций рассматривается устойчивость тех процессов и состояний, которые изучаются в этой дисциплине, – устойчивость деформированных состояний и равновесия.

Реальные объекты и их расчетные схемы отличаются друг от друга. В природе не существует идеально упругих тел, абсолютно прямых стержней, статических состояний. Введение этих понятий обусловлено желанием доступными средствами установить связи между наиболее существенными характеристиками внешнего воздействия и параметрами состояния системы. А так как в реальных условиях всегда есть причины, побуждающие к отклонениям от рассматриваемых гипотетических состояний, возникает вопрос о реакции конструкции на малые возмущения внешнего воздействия. Задачи подобного рода рассматриваются в теориях устойчивости

В развитии теорий устойчивости упругих систем со времен Эйлера, основоположника теории устойчивости, достигнуты значительные успехи. Было изучено большое количество форм потери устойчивости различных конструкций как стержневых (колонны, фермы, арки, рамы), так и сплошных (пластинки и оболочки).

Особенно обстоятельно было обследовано явление потери устойчивости обычных (не тонкостенных) стержней. Напомним, в чем оно заключается. Будем сжимать центрально приложенной силой P стержень прямой осью (рис 1.55). Если сила P невелика (меньше некоторого значения), то стержень будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Это означает, что если мы отклоним стержень из состояния равновесия (т.е. изогнем его, приложив к нему, например, поперечную нагрузку) и затем удалим причину, вызвавшую отклонение, то стержень вернется в первоначальное положение, т.е. опять станет стержнем с прямой осью (рис. 1.55, *a*)

Если сила P превысит некоторое значение $P_{кр}$, называемое критической силой, то форма равновесия стержня с прямой осью станет неустойчивой. Это означает, что если мы теперь отклоним стержень от состояния

равновесия (т.е. изогнем его), то после удаления причины, вызвавшей изгиб, он в первоначальное положение не возвратится, а останется в изогнутом состоянии, которое при этом значении силы становится устойчивым (рис. 1.55, б).

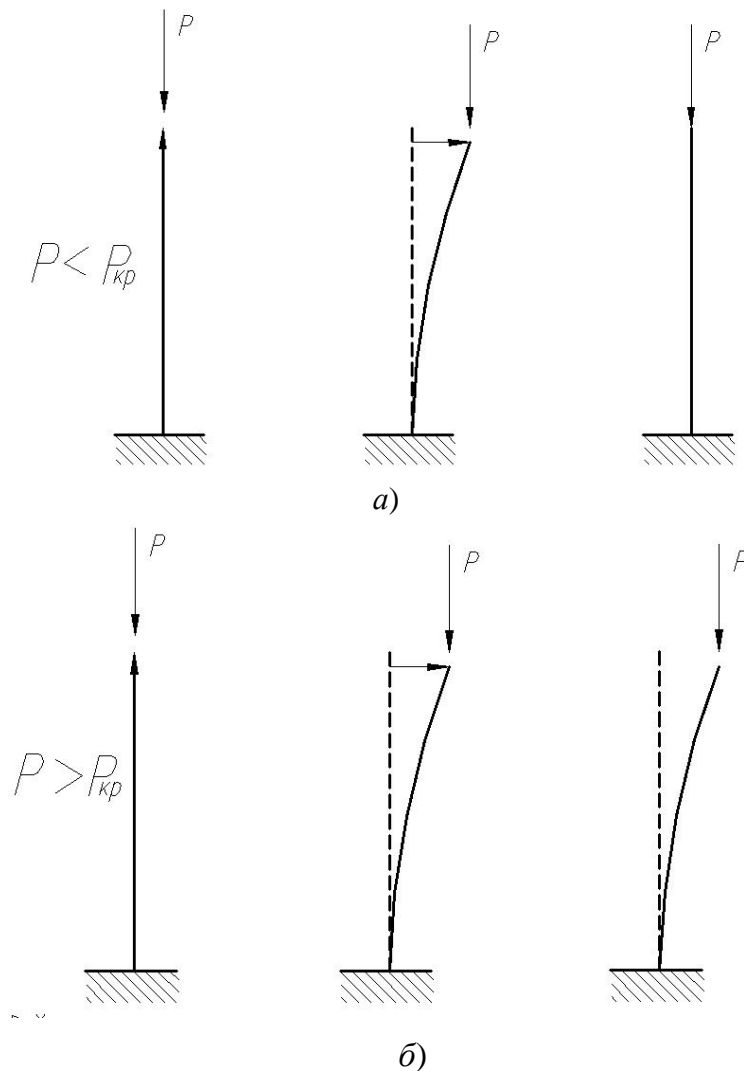


Рис. 1.55. Отклонение от форм равновесия: а) – устойчивой, б) – неустойчивой

Если сила P будет точно равна критическому значению $P_{кр}$, то стержень, строго говоря, будет находиться в состоянии безразличного равновесия: обе формы равновесия – с прямой и изогнутой осью – становятся одинаково возможными. Говорят, что при $P = P_{кр}$ происходит разветвление (бифуркация) форм равновесия.

Можно сказать, что критической силой $P_{кр}$ называется сила, при которой происходит смена устойчивых форм равновесия. При $P < P_{кр}$ устойчивой является форма равновесия стержня с прямой осью. При $P > P_{кр}$, наоборот, первая форма равновесия становится неустойчивой, а вторая (изо-

гнутая) устойчивой. При $P = P_{кр}$, как уже отмечалось, обе формы равновозможны и стержень становится в состоянии безразличного равновесия.

Таким образом, мы рассмотрели «физическую» интерпретацию понятия критической силы $P_{кр}$.

Ниже проиллюстрируем «математическую» интерпретацию, для этого рассмотрим классический пример шарнирно опертого стержня под воздействием продольной силы P (рис.1.55в).

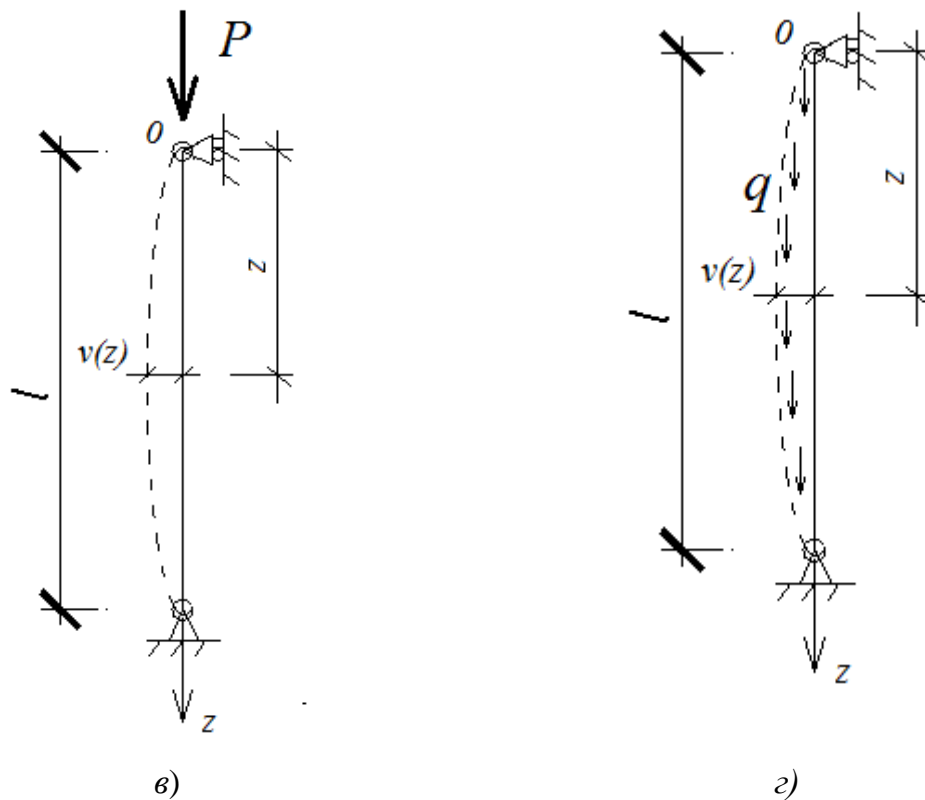


Рис. 1.55. Отклонение от форм равновесия при воздействии продольной силы: в) – сосредоточенной, з) – равномерно распределенной

Обозначим через $v(z)$ функцию горизонтальных перемещений относительно продольной оси z .

Запишем выражение для изгибающего момента в текущем сечении z для верхней отсеченной части:

$$M(z) = -P \cdot v(z)$$

С другой стороны, из курса сопротивления материалов известна формула:

$$M(z) = EI_y \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Приравняв эти 2 выражения изгибающих моментов, получим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня:

$$EI_y \frac{d^2 v}{dz^2} + P \cdot v(z) = 0$$

Введем обозначение $\alpha^2 = \frac{P}{EI_y}$, тогда вышезаписанное уравнение примет вид однородного линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \alpha^2 \cdot v(z) = 0$$

В математике определено, что такое уравнение имеет решение вида:

$$v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$$

Убедиться в правильности этого решения можно путем непосредственной подстановки в исходное уравнение.

Данное решение имеет 2 неопределенных постоянных A и B , для определения которых необходимо задать граничные условия на концах стержня:

1. Отсутствие перемещений в начале стержня $v(0) = 0$

Положив $z = 0$, получим

$$v(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = 0$$

Отсюда $A = 0$

2. Отсутствие перемещений в конце стержня $v(l) = 0$

Положив $z = l$, получим

$$v(l) = B \sin \alpha l = 0$$

Константа B , представляющая собой наибольший прогиб стержня, не может быть равна нулю, так как при $B = 0$ возможна только прямолинейная форма равновесия, а мы ищем условие, при котором возможна и криволинейная форма равновесия. Поэтому должно быть $\sin \alpha l = 0$. Отсюда следует, что криволинейные формы равновесия стержня могут существовать, если αl принимает значения $\pi, 2\pi, n\pi$. Величина αl не может быть равна нулю, так как это решение соответствует случаю

$$\alpha l = \sqrt{\frac{P}{EI_y}} l = 0$$

Минимальное значение критической силы $P_{кр}$, при которой возможен переход равновесия от устойчивого к неустойчивому, будет при $\alpha l = \pi$, т.е.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \quad (1.248)$$

Математически будет верна и формула, соответствующая решению при $\alpha l = n\pi$, являющаяся более общей:

$$P_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EI_y}{l^2}$$

Однако физически такое решение на практике невозможно, ввиду того что стержень, достигнув загрузки первой критической силой (1.248), уже потеряет устойчивость и нагрузка не сможет достигнуть других критических значений.

Выведенная формула (1.248) была впервые получена в 1744г. российским механиком Леонардом Эйлером (1703-1783), большую часть жизни проработавши м в Петербургской Академии наук, и носит его имя – формула Эйлера.

Позднее, уже в начале XX века А.Н. Динником (1876-1950, с 1926г. академик Академии наук УССР и с 1946г. действительный член Академии наук СССР) была предложена формула для критической равномерно распределенной нагрузки (рис.1.55г):

$$q_{кр} = \frac{18,6EI_y}{l^3}$$

Далее в теории устойчивости вводится понятие расчетной длины.

Для этого окончательно перепишем уравнение перемещений.

$$v(z) = B \sin \frac{\pi n}{l} z,$$

графиком которой является синусоида (одна полуволна которой показана пунктиром (при значении $n=1$) на рис. 1.55в), а параметр B остается по-прежнему неопределенной постоянной.

Формула (1.248), как следует из ее вывода, справедлива не только для стержня с шарнирно закрепленными концами, но и для любого стержня, который изогнется при выпучивании по целому числу полуволн.

Можно доказать, что в зависимости от граничных условий сохранится характер продольного изгиба (см. рис 1.55д,е,ж,з), а критическая сила определится видоизмененной формулой

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_0^2}$$

где l_0 – так называемая «свободная» длина стержня, отличающаяся от геометрической длины величиной μ , именуемой коэффициентом расчетной длины:

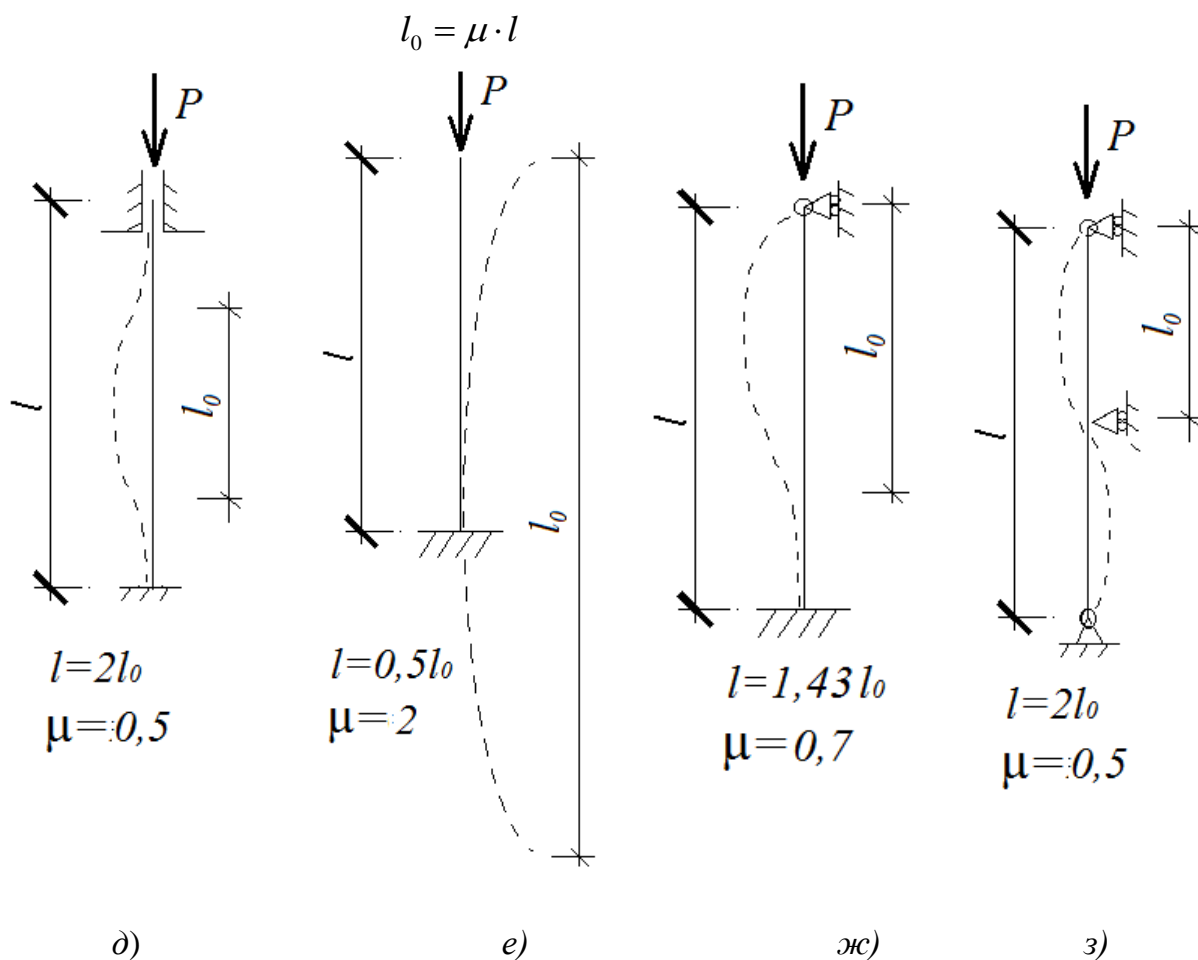


Рис. 1.55. Отклонение от форм равновесия при воздействии продольной силы: д) – на стержень, жестко заделанный с двух концов, е) – на консольный стержень, ж) на стержень, жестко заделанный с одной стороны и шарнирно опертый с другой, з) на шарнирно опертый стержень, имеющий промежуточную опору

Итак, коэффициент расчетной длины μ - это величина, обратная количеству полуолн синусоид продольного изгиба, укладываемых в пределах геометрической длины стержня.

На рис. 1.55 д, е, ж, з проиллюстрированы свободные длины и коэффициенты расчетной длины для наиболее часто встречающихся в строительной механике простейших стержневых расчетных схем.

Изображенная картина потери устойчивости является идеализированной схемой, основанной на основании линейной теории упругости. Для ее осуществления необходим ряд условий: стержень должен быть строго призматическим с идеально прямой осью, материал стержня должен быть однородным и точно следовать линейным законам теории упругости, сила должна быть приложена точно в центре тяжести и направлена строго по оси стержня. Эти условия в действительности никогда не встречаются.

Тем не менее, практическое значение вышеизложенной схемы потери устойчивости весьма велико, так как она является довольно точным описанием картины явления, происходящего в действительности. Различия между теоретической схемой потери устойчивости и наблюдаемой на практике картиной не так уж велики. Они состоят в том, что в действительности стержень начинает изгибаться сразу же при любом малом значении нагрузки. Но поперечные прогибы стержня вначале с возрастанием нагрузки растут медленно. По мере приближения силы P к критическому значению, эти прогибы растут быстрее и быстрее и при $P = P_{кр}$ они достигают очень больших значений, таких, что возникающие за их счет изгибающие моменты очень часто приводят к разрушению стержня. Поэтому в практических руководствах и др. критическую силу определяют как силу, разрушающую стержень.

С этой точки зрения практическое значение вышеизложенной схемы потери устойчивости заключается в том, что составленные на ее основе расчетные формулы для критических сил и коэффициентов продольного изгиба φ дают вполне удовлетворительное представление о величине той нагрузки, которую может выдержать стержень. Однако эту схему необходимо рассматривать как первое приближение к действительности. Дальнейшее развитие теории устойчивости идет за счет снятия ограничений и учета возможно большего количества факторов, влияющих на устойчи-

вость, т.е. за счет усложнения (в разумных пределах) расчетной схемы (например, [2,7]).

1.7.2. Особенности явления потери устойчивости тонкостенных стержней

Теория устойчивости тонкостенных стержней подробно описана В.З. Власовым в [2] и является существенным шагом вперед в этом отношении, т.к. по сравнению с обычной теорией учитывает некоторые новые факторы.

Вариационные основы теории устойчивости, в том числе и тонкостенных стержней при продольном и поперечном изгибе подробно рассмотрены в книге А.В. Перельмутера и В.И Сливкера[20].

Однако мы, в рамках общей концепции книги, ограничимся рассмотрением вопросов устойчивости лишь в дифференциальной постановке.

Рассмотрим два состояния стержня: до и после потери устойчивости (соответственно левая и правая части рис 1.56а). Отметим в первом состоянии сечение *I-I*, которое будем считать плоским. Это сечение во втором состоянии займет положение *II-II* и будет неплоским, т.е. получит искривление или депланацию.

Получить сечения *I-I* в состоянии *II-II* можно осуществить, перемещая его вначале как жесткий диск, а затем сообщая ему депланацию. Но жесткий диск в пространстве обладает шестью степенями свободы. Для данного перемещения его необходимо совершить 3 поступательных перемещения по направлениям осей *x*, *y* и *z* и 3 вращательных – вокруг этих осей. Кроме этих деформаций, связанных с перемещением сечения как твердого диска, возникнет еще и депланация – деформация, связанная с искривлением поперечного сечения. Перечислим еще раз эти виды деформаций:

- 1) сжатие (перемещение по оси *z*);
- 2) сдвиг в направлении оси *x*;
- 3) сдвиг в направлении оси *y*;
- 4) кручение вокруг оси *z*;
- 5) изгиб вокруг оси *x*;
- 6) изгиб вокруг оси *y*;
- 7) депланация.

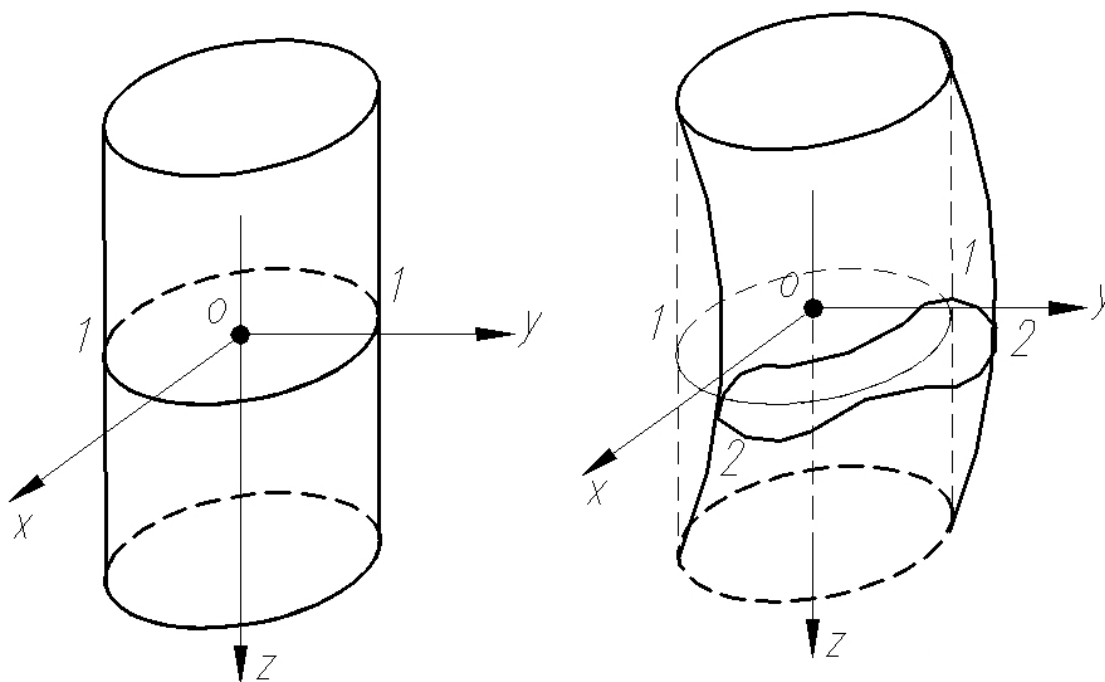


Рис. 1.56а. Потеря устойчивости тонкостенного стержня

До потери устойчивости вся потенциальная энергия стержня была энергией сжатия. После потери устойчивости она распределяется по семи указанным состояниям, причем это распределение зависит от геометрических размеров и формы стержня. Например, для достаточно длинного массивного (не являющегося тонкостенным) стержня наибольшее количество энергии перейдет в энергию изгиба 5 и 6. Следовательно, для его устойчивости существенное значение будут иметь деформации изгиба. Учет только этих деформаций приводит к обычным формулам Эйлера.

Для более коротких массивных стержней и стержней составного сечения доля энергии, приходящаяся на деформации сдвига 2 и 3, может оказаться существенной и эти деформации необходимо учитывать. Сделав это, получим известную теорию продольного изгиба с учетом влияния поперечных сил на прогиб стержня.

Теория устойчивости тонкостенных стержней [2] показывает, что часть энергии, приходящаяся на седьмую степень свободы (депланацию), является для тонкостенных стержней весьма существенной и ее учет приводит к появлению новых форм потери устойчивости, качественно отличных от Эйлеровых (изгибных) форм.

Как уже говорилось в параграфе 1.3.5, поведение тонкостенных стержней можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} = q_x \\ EI_x \eta^{IV} = q_y \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_d \theta'' = m, \end{cases} \quad (1.249)$$

Где ξ и η – перемещения центра изгиба в направлении осей x и y ; θ – угол закручивания; q_x и q_y – интенсивности погонных поперечных нагрузок, m – интенсивность крутящего момента, определяемого относительно центра изгиба.

Явление потери устойчивости тонкостенного стержня легче всего исследовать с помощью дифференциальных уравнений устойчивости.

Система дифференциальных уравнений устойчивости впервые была составлена В.З. Власовым и модифицирована П.А. Лукашом, одним из его преемников:

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} - (N(\xi' + \alpha_y \theta'))' + (M_x \theta)'' = 0 \\ EI_x \eta^{IV} - (N(\eta' - \alpha_x \theta'))' + (M_y \theta)'' = 0 \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_d \theta'' - ((r^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y + \beta_\omega B) \theta')' - \\ - \alpha_y (N \xi')' + \alpha_x (N \eta')' + M_x \xi'' + M_y \eta'' = 0 \end{cases} \quad (1.250a)$$

Здесь и далее:

α_x, α_y – координаты центра изгиба;

U_x, U_y, U_ω – соответственно полярно-осевые моменты инерции относительно осей x и y и секториально-полярный момент инерции

$$r^2 = (\alpha_x^2 - \alpha_y^2) \frac{I_x + I_y}{A}$$

$$\beta_x = \frac{U_y}{2I_y} - \alpha_x; \beta_y = \frac{U_x}{2I_x} - \alpha_y; \beta_\omega = \frac{U_\omega}{I_\omega}$$

Система уравнений (1.250a), выражающая условия равновесия, описывает поведение тонкостенного стержня с учетом его деформированного состояния. Из ее решения можно определить критические силы, поэтому она называется системой дифференциальных уравнений устойчивости [7]

Если до потери устойчивости стержень не закручивается, т.е. отсутствует депланация, то в расчетных формулах пропадут члены, связанные с секториальными геометрическими характеристиками, а в третьем уравнении пропадет член, содержащий бимомент.

Система (1.250а) описывает такой случай потери устойчивости, который не связан с появлением новых форм равновесия. До потери устойчивости стержень закручивается и депланирует, и после потери устойчивости — закручивается и депланирует. Таким образом, деформации стержня после потери устойчивости меняются только количественно. Такую форму потери устойчивости часто в литературе [7 и др.] называют потерей устойчивости второго рода.

Устойчивость центрально сжатого тонкостенного стержня

Рассмотрим тонкостенный стержень длиной l , нагруженный всего лишь одной продольной силой P , приложенной к центру тяжести концевое сечения (рис. 1.56б) и шарнирно закрепленный с обеих сторон.

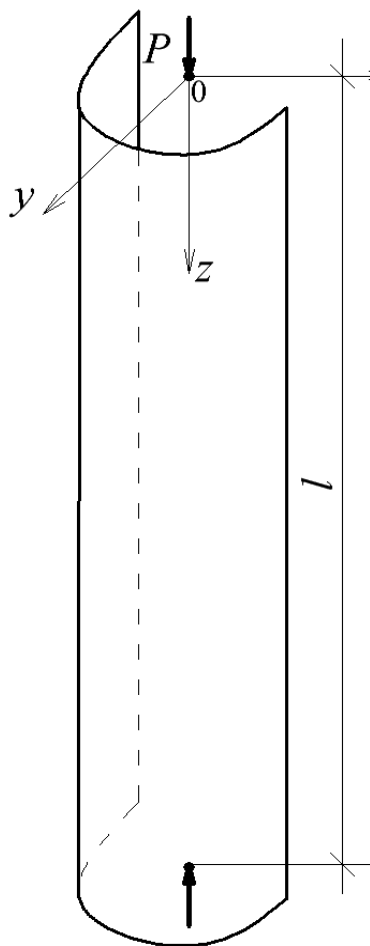


Рис. 1.56б. Центрально сжатый тонкостенный стержень

Для того, чтобы получить из системы уравнений (1.250) систему уравнений устойчивости центральносжатого стержня, необходимо принять

$$\begin{cases} B = 0 \\ M_x = M_y = 0 \\ N = -P, \end{cases}$$

Поскольку сила P приложена в центре тяжести сечения, $e_x = e_y = 0$

После упрощений, вносимых этими условиями, система уравнений (1.250а) примет вид:

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} + P\xi'' + \alpha_y P\theta'' = 0 \\ EI_x \eta^{IV} + P\eta'' - \alpha_x P\theta'' = 0 \\ EI_\omega \theta^{IV} + (r^2 P - GI_d)\theta'' + \alpha_y P\xi'' - \alpha_x P\eta'' = 0 \end{cases} \quad (1.250б)$$

Будем считать, что концы стержня закреплены от перемещений в плоскости поперечного сечения и свободны от нормальных напряжений. Математически эти граничные условия запишутся так:

$$\begin{aligned}\xi(0) = \eta(0) = 0, \theta(0) = 0, \\ \xi''(0) = \eta''(0) = 0, \theta''(l) = 0\end{aligned}$$

При этих условиях системе уравнений (1.250б) будут удовлетворять функции:

$$\begin{aligned}\xi(z) &= B_\xi \sin \frac{\pi n}{l} z, \\ \eta(z) &= B_\eta \sin \frac{\pi n}{l} z, \\ \theta(z) &= B_\theta \sin \frac{\pi n}{l} z\end{aligned}\tag{1.251a}$$

где B_ξ, B_η, B_θ - некоторые постоянные коэффициенты, а n - любое натуральное число.

В том, что функции (1.251а) удовлетворяют уравнениям, можно убедиться непосредственно подстановкой их в уравнения.

После подстановки, Обозначив $\alpha = n \frac{\pi}{l}$ и сократив уравнения на общий множитель $\alpha^2 \sin \lambda z$ получим следующую систему алгебраических линейных уравнений относительно констант B_ξ, B_η, B_θ .

$$\begin{cases} (EI_y \alpha^2 - P)B_\xi - \alpha_y P B_\theta = 0 \\ (EI_x \alpha^2 - P)B_\eta - \alpha_x P B_\theta = 0 \\ EI_\omega \theta^{IV} - (r^2 P - GI_d)B_\theta - \alpha_y P B_\xi + \alpha_x P B_\eta = 0 \end{cases}\tag{1.251б}$$

Как известно из курса математики, для того, чтобы постоянные B_ξ, B_η, B_θ не равнялись нулю, необходимо положить равным нулю определитель матрицы этой системы:

$$\begin{bmatrix} P_y - P & 0 & -\alpha_y P \\ 0 & P_x - P & \alpha_x P \\ -\alpha_y P & \alpha_x P & P_\omega - P \end{bmatrix}\tag{1.251в}$$

Здесь введены обозначения:

$$P_x = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{l^2}, P_y = \frac{n^2 \pi^2 EI_y}{l^2}, P_\omega = \frac{1}{r^2} \left(\frac{n^2 \pi^2 EI_\omega}{l^2} + GI_d \right)\tag{1.252}$$

Непосредственной подстановкой в систему уравнений (1.251б) можно доказать, что именно при этих значениях параметров P_x, P_y и P_ω определитель системы будет равен 0.

Величины (1.252) представляют собой 3 критические силы центральносжатого тонкостенного стержня, имеющего в сечении 2 оси симметрии.

Для получения значений наименьших критических сил необходимо положить $n=1$

Нетрудно видеть, что первые два выражения для P_x и P_y (1.252) есть формулы Эйлера (см. параграф 1.7.1).

Третья же критическая сила P_ω связана с закручиванием тонкостенного стержня и деформацией поперечного сечения и называется **критической силой для чисто крутильной формы потери устойчивости**. Физически крутильная форма потери устойчивости выражается в том, что стержень при $P = P_\omega$ начинает закручиваться вокруг центра тяжести, оставаясь прямолинейным. Это явление можно хорошо продемонстрировать на резиновых образцах.

Критические же силы P_x и P_y могут быть получены для такого центральносжатого стержня, у которого центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Если же центр тяжести стержня не совпадает с центром изгиба, то стержень теряет устойчивость одновременно и изгибаясь, и закручиваясь, поэтому эта смешанная форма потери устойчивости называется **изгибно-крутильной**. Она была теоретически предсказана В.З. Власовым и впоследствии им же обнаружена экспериментально.

В [7] доказано, что наименьшая из критических сил будет меньше, чем по обычной теории продольного изгиба, т.е. меньше, чем P_x и P_y . Также эта сила в общем случае меньше, чем P_ω . Поэтому эта наименьшая критическая сила и должна быть принята за расчетную.

1.7.3. Общая устойчивость тонкостенных стержней в условиях поперечного изгиба

Для иллюстрации картины потери устойчивости тонкостенных стержней при поперечном изгибе рассмотрим процесс потери устойчивости поперечноизгибаемого стержня общего вида (нетонкостенного).

На рис. 1.56в пунктиром изображена узкая полоса, заделанная на правом конце, под действием силы P , приложенная в центре тяжести сечения.

В процессе потери устойчивости дополнительно возникают изгиб в горизонтальной плоскости (выпучивание из вертикальной плоскости) и кручение относительно продольной оси стержня.

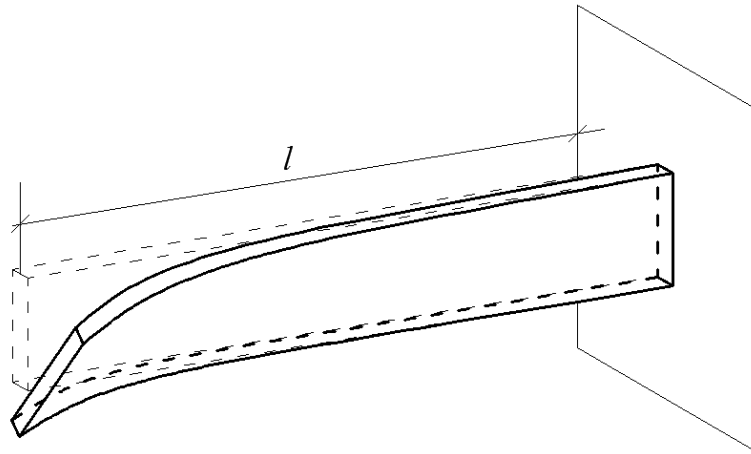


Рис. 1.56в. Форма потери устойчивости стержня при поперечном изгибе

Рассмотрим теперь теоретические основы потери устойчивости на примере чистого изгиба (так называемый «стержень Бернулли-Эйлера»): балка, жестко заделанная с двух сторон, загружена двумя равными изгибающими моментами $M_x = const$ по краям.

Такое напряженное состояние реализуется, например, при температурном воздействии, когда по сечению стержня вдоль координаты z изменение температуры волокон подчиняется линейному закону (рис 1.56г).

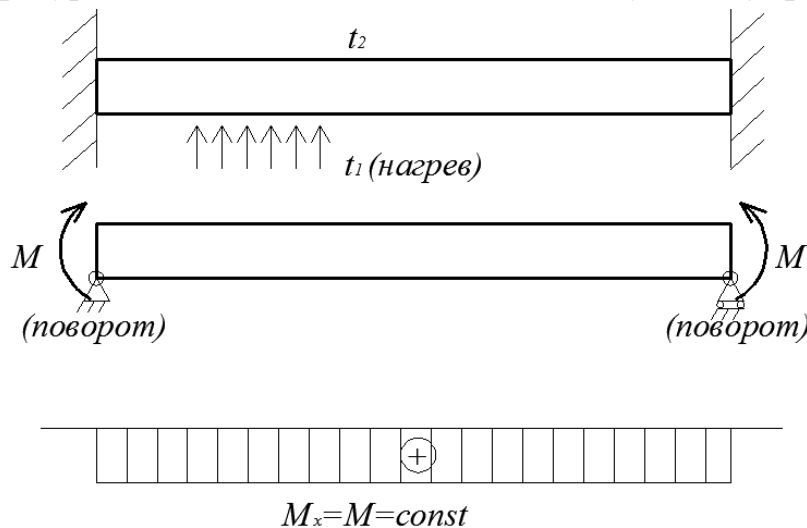


Рис. 1.56г. Два случая чистого изгиба

Другой вариант подобного нагружения возможен при искусственном поворачивании стержня по краям на один и тот же угол, но в разных направлениях (рис. 1.56г).

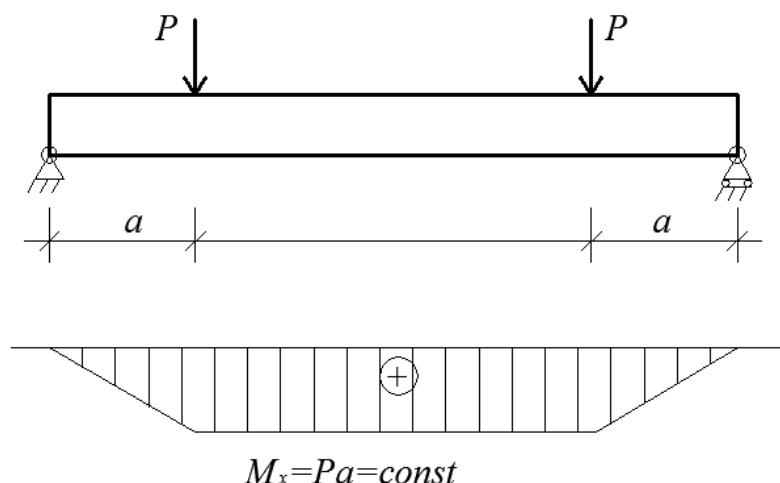


Рис. 1.56д. Случай чистого изгиба при сосредоточенного нагрузке

Также возможен вариант симметричного нагружения симметрично закрепленного стержня двумя сосредоточенными силами \$P\$ (см. например, рис. 1.56д), когда на промежутке между точками приложения двух сил возникает постоянный изгибающий момент.

В [20] приводится система дифференциальных уравнений Эйлера (уравнений устойчивости) для стержней общего вида (нетонкостенных):

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} + (M_x \theta)'' = 0 \\ EI_x \eta^{IV} + (M_y \theta)'' = 0 \\ -GI_d \theta'' + M_x \xi'' + M_y \eta'' = 0 \end{cases} \quad (1.253a)$$

В случае изгиба в одной плоскости эта система уравнений упрощается до системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} + (M_x \theta)'' = 0 \\ -GI_d \theta'' + M_x \xi'' = 0 \end{cases} \quad (1.253б)$$

Эта система уравнений сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\xi^{IV} + \alpha^2 \xi'' = 0, \text{ где } \alpha = \pm \frac{M_x}{\sqrt{EI_y GI_d}} \quad (1.253в)$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$\xi(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + C + Dz \quad (1.253г)$$

А угол закручивания, выраженный с помощью \$\xi(z)\$ окажется равен:

$$\theta(z) = A \frac{M_x}{GI_d} \cos \alpha z + B \frac{M_x}{GI_d} \sin \alpha z + E + Fz, \quad (1.253д)$$

где, в данном случае латинскими буквами A, B, C, D, E, F обозначены постоянные величины.

Для определения этих постоянных обратимся к граничным условиям, соответствующим жесткой заделке (равенство нулю перемещения ξ , углов поворота ξ' и закручивания θ), в начальном сечении стержня:

$$\xi(0) = 0 \Rightarrow A = -C, \quad \xi'(0) = 0 \Rightarrow -\alpha B = D$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow A \frac{M_x}{GI_d} = -E$$

Подставив эти соотношения в (1.253г,д), приводим решение к виду:

$$\xi(z) = A(\cos \alpha z - 1) + B(\sin \alpha z - \alpha z)$$

$$\theta(z) = A \frac{M_x}{GI_d} (\cos \alpha z - 1) + B \frac{M_x}{GI_d} \sin \alpha z + Fz$$

Остаются неиспользованные граничные условия при $x = l$:

$$\xi(l) = 0, \quad \xi'(l) = 0, \quad \theta(l) = 0,$$

которые приводят к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A, B и F :

$$\begin{aligned} A(\cos \alpha l - 1) + B(\sin \alpha l - \alpha l) &= 0 \\ -A \sin \alpha l + B(\cos \alpha l - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$A \frac{M_x}{GI_d} (\cos \alpha l - 1) + B \frac{M_x}{GI_d} \sin \alpha l + Fl = 0$$

В матричной форме эта система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha l - 1 & \sin \alpha l - \alpha l & 0 \\ -\sin \alpha l & \cos \alpha l - 1 & 0 \\ \frac{M_x}{GI_d} (\cos \alpha l - 1) & \frac{M_x}{GI_d} \sin \alpha l & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приравняв определитель матрицы этой системы к нулю и проведя соответствующие несложные математические операции, получим характеристическое уравнение:

$$2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l = 0$$

В [20, глава 4.1] доказывается, что минимальное значение, при котором данное уравнение обращается в тождество: $\alpha l = 2\pi$.

Соответственно критическое значение изгибающего момента M_x :

$$M_{кр} = \pm \alpha \sqrt{EI_y GI_d} = \pm \frac{2\pi}{l} \sqrt{EI_y GI_d}$$

Далее, уже без доказательства, приведем формулу для критических значений нагрузок при двух более сложных, но более распространенных, случаях загрузения – при воздействии поперечной силы P посредине стержня и равномерно распределенной нагрузки q (рис.1.56е):

$$P_{кр} = \pm \frac{16,98}{l^2} \sqrt{EI_y GI_d}$$

$$q_{кр} = \pm \frac{28,3}{l^3} \sqrt{EI_y GI_d}$$

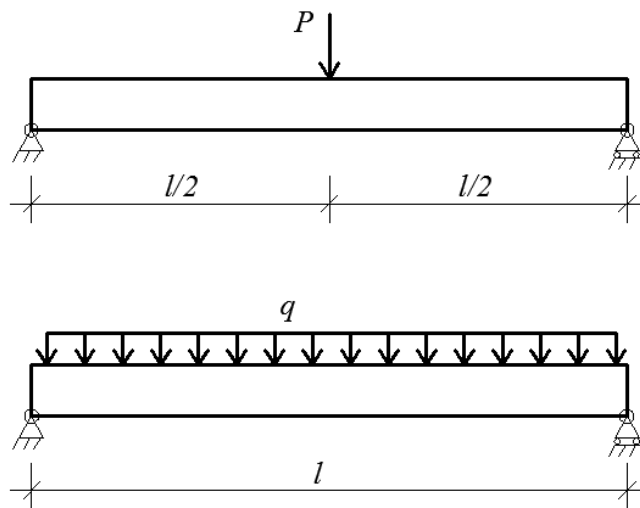


Рис. 1.56е. Схемы приложения нагрузок

Сложность решения таких задач состоит в том, что характеристичесие уравнения не имеют таких простых решений, как в случае чистого изгиба, и для их определения необходимо использовать, например, разложение функций деформаций с помощью числовых рядов.

Особенности потери общей устойчивости тонкостенных стержней при поперечном изгибе

Рассмотрим теперь уже тонкостенный стержень, шарнирно опертый с двух сторон под действием только поперечной нагрузки, когда продольные силы отсутствуют.

В общих уравнениях (1.250а) необходимо положить $N=0$, после чего они примут вид:

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} + (M_x \theta)'' = 0 \\ EI_x \eta^{IV} + (M_y \theta)'' = 0 \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_d \theta'' - ((2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y) \theta')' + M_x \xi'' + M_y \eta'' = 0 \end{cases} \quad (1.254)$$

Изгибающий момент от поперечной нагрузки M_x так же, как и в предыдущем примере, является постоянной величиной.

Если стержень имеет сечение с двумя осями симметрии, то $a_x=a_y=\beta_x=\beta_y=0$ уравнения (1.254) значительно упрощаются. Если плоскость действия поперечной нагрузки проходит через ось стержня, и эта ось загрузки единственная, то в уравнениях (1.254) необходимо положить еще и $e_y=0$, и они примут вид:

$$\begin{cases} EI_y \xi^{IV} + (M_x \theta)'' = 0 \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_d \theta'' + M_x \xi'' = 0 \end{cases} \quad (1.254а)$$

Запишем граничные условия, соответствующие условиям шарнирного опирания.

$$\begin{aligned} \xi(0) = 0, \xi''(0) = 0, \theta(0) = 0, \theta''(0) = 0 \\ \xi(l) = 0, \xi''(l) = 0, \theta(l) = 0, \theta''(l) = 0 \end{aligned} \quad (1.254б)$$

Разыскивая функции ξ и θ в виде синусоид

$$\begin{aligned} \xi(z) = B_\xi \sin \frac{\pi n}{l} z, \\ \theta(z) = B_\theta \sin \frac{\pi n}{l} z \end{aligned} \quad (1.254в)$$

и положив $n=1$ приходим после подстановок в (1.254а) к системе двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} B_\xi - M_x B_\theta = 0 \\ -M_x B_\xi + \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} - GI_d \right) B_\theta = 0 \end{cases} \quad (1.254г)$$

Условие существования ненулевого решения этой системы уравнений приводит к квадратному уравнению, корни которого определяют 2 критических значения внешнего изгибающего момента M_{cr} :

$$M_x^2 - \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} + GI_d \right) = 0 \quad (1.254г)$$

В общем случае критический момент окажется равным

$$M_{кр} = \pm \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \sqrt{\frac{I_\omega}{I_y} + \frac{l^2 GI_d}{\pi^2 EI_y}} \quad (1.254е)$$

В книге [7] приводятся частные решения для отдельных видов нагрузок в виде, приближенном к «классическому» случаю Эйлера: сосредоточенной силы посередине тонкостенного стержня и равномерно распределенной по длине.

Соответственно критические значения этих нагрузок (приведем их без доказательства) составят [7, стр.146]:

$$P_{кр} = \frac{k_1 \sqrt{EI_y GI_d}}{l^2} \quad (1.255)$$

$$q_{кр} = \frac{k_2 \sqrt{EI_y GI_d}}{l^3} \quad (1.256)$$

Величины k_1 и k_2 есть функции параметра

$$m^2 = \frac{GJ_t l^2}{EJ_\omega} = k^2 l^2 \quad (1.257)$$

Их значения приведены в таблице 1.3. [7, стр.147]

Таблица 1.3.

m^2	0,4	4	8	16	24	32	48	64	80	96	160	240	320	400
k_1	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	19,0	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2
k_2	143	53,3	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5	30,5	30,1	29,0	29,0	28,8	28,6	28,6

Помимо этого рассмотрим, но также без доказательства формул, устойчивость балок с нулевой секториальной жесткостью $I_\omega=0$. Этот случай соответствует стержням, имеющим сечение любого типа с нулевой секториальной жесткостью, например, к полосе, уголку, тавру (так называемым, «лепестковым» сечениям) и т.д. Значение критической силы, являющееся решением системы (1.258) составит:

$$P_{кр} = \frac{k_3 \sqrt{EI_y GI_d}}{l^2} \quad (1.258)$$

Значения коэффициентов k_3 для балки-полосы при различных граничных условиях указаны в таблице 1.4 [7, стр.147], где в первой графе указаны расчетные схемы балок, а в последующих графах – коэффициенты k_3 для определения критических сил различных порядков.

Если сила приложена не в середине балки, то коэффициент k_3 определяется из табл. 1.5 [7, стр.148], где даны его значения для балки на двух опорах. Здесь через a обозначено расстояние от одной из опор до точки приложения силы.

Таблица 1.4

Критические коэффициенты k_3

Схема нагружения и граничные условия	Коэффициент k_3		
	1-я критическая сила P	2-я критическая сила P	высшие критические силы P
консольная балка (сила P приложена на конце консоли)	4,01	10,24	$\pi(8n-3)/4$
однопролетная балка с жестким защемлением с двух сторон (сила P приложена у опоры с правой стороны)	5,56	11,82	$\pi(8n-1)/4$
однопролетная шарнирно опертая балка (сила P приложена посередине)	16,94	68,6	$\pi(8n-5)/4$

Таблица 1.5

Критические коэффициенты k_3 в зависимости от места приложения силы P

a/l	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05
k_3	16,94	17,82	21,01	29,11	56,01	112,0

Значения же критических коэффициентов для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, приведены в таблице 1.6 [7, стр. 149].

Таблица 1.6

Критические коэффициенты k_4

Схема нагружения и граничные условия	Коэффициент k_4		
	1-я критическая сила q_l	2-я критическая сила q_l	высшие критические силы q_l
Консольная балка	12,85	38,56	$2\pi(3n-1)$
Однопролетная балка с жестким защемлением с двух сторон	15,95	34,6	$\pi(6n-1)$
Шарнирно опертая балка	28,3	-	-

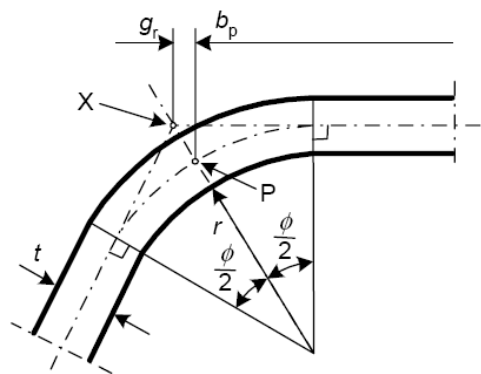
1.7.4. Местная потеря устойчивости. Положения расчета Еврокода-3

Влияние потери местной устойчивости и несовершенства формы должны учитываться при определении прочности и жесткости холодногнутых элементов и настилов.

Расчет сжатых элементов с краевыми или промежуточными элементами жесткости должен быть основан на допущении, что элемент жесткости работает как сжатый с непрерывным частичным защемлением, как пружина, жесткость которой зависит от граничных условий и изгибной жесткости соседних плоских элементов.

Методика расчета по местной потере устойчивости и несовершенству форм подробно описана в [3]. Согласно [3], влияние потери местной устойчивости и несовершенства формы должны учитываться при определении прочности и жесткости холодногнутых элементов и настилов.

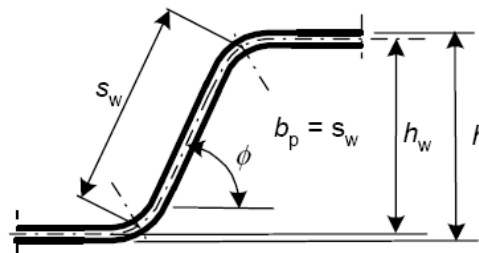
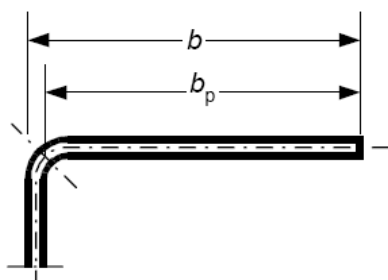
Влияние потери местной устойчивости может учитываться с использованием геометрических характеристик эффективного сечения, рассчитанных на основе эффективных ширин (рис.1.57)



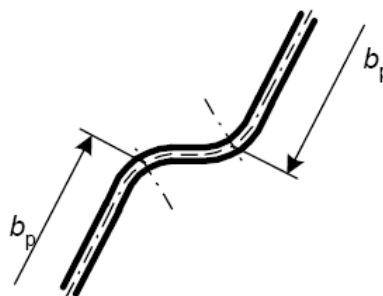
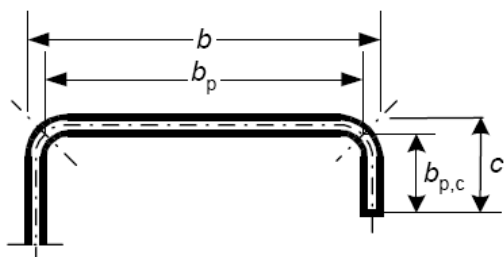
(a) средняя точка угла или сгиба
 x – пересечение средних линий
 p – средняя точка угла

$$r_m = r + t/2$$

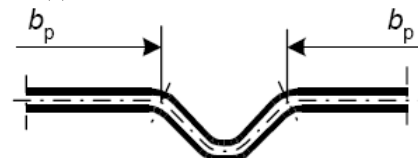
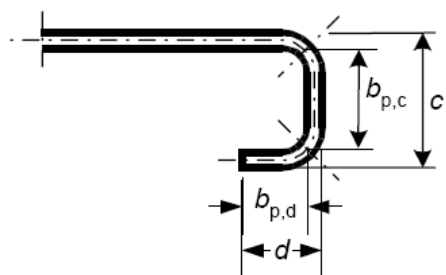
$$g_r = r_m \left(\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)$$



(c) Теоретическая ширина плоской части стенки
 ($b_p =$ наклонная высота S_w)



(d) Теоретическая ширина b_p плоских частей соседних с элементом жесткости на стенке



(e) Теоретическая ширина b_p плоских участков, соседних с элементом жесткости на полке

(b) Теоретическая ширина b_p для плоских частей полок

Рис. 1.57. Теоретическая ширина b_p плоских участков поперечного сечения, примыкающих к радиальному углу.

При расчете на прочность с учетом местной потери устойчивости предел текучести f_y принимается как f_{yb} для случая определения эффективной ширины сжатых элементов по EN 1993-1-5.

Для оценки эксплуатационной пригодности эффективная ширина сжатого элемента определяется по сжимающему напряжению σ_{com} в элементе при предельной нормативной статической нагрузке.

Несовершенства формы элементов с краевыми и промежуточными элементами жесткости показаны на рис. 1.58, *d* и рассматриваются в разделе 5.5.3 части 1-3 Еврокода 3.

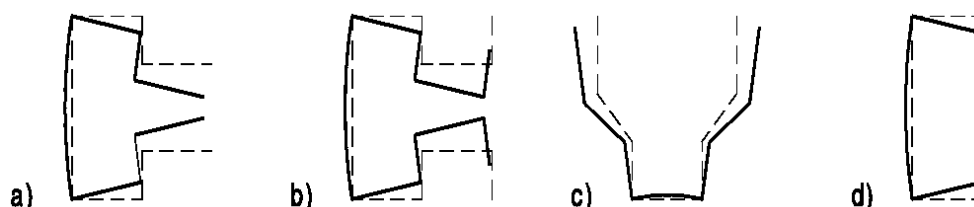


Рис. 1.58 Примеры несовершенств формы сечения

Влияние несовершенства формы должны учитываться для случаев, показанных на рис. 1.58, а), b) и c). В этих случаях влияние несовершенства формы оценивается линейным (см. 5.5.1(8) часть 1-3 Еврокода 3) или нелинейным расчетом на устойчивость (см. EN 1993-1-5), используя численные методы или испытания стоек.

Если не использовать упрощенный способ по п. 5.5.3 части 1-3 Еврокода 3, где упругие напряжения потери устойчивости определяются линейным расчетом, может быть предложен следующий алгоритм:

- 1) рассчитать упругие напряжения потери устойчивости для соответствующих волнообразных форм потери устойчивости элемента полной длины, показанного на рис. 1.59а;

- 2) рассчитать эффективную (приведенную) ширину, соответствующую 5.5.2 части 1-3 Еврокода-3 для частей поперечного сечения, потерявших местную устойчивость при минимальном напряжении, см. рис. 1.59б;

- 3) рассчитать уменьшенную толщину (см. 5.5.3.1(7) части 1-3 Еврокода-3) для краевых и промежуточных элементов жесткости или других частей поперечного сечения, подверженных несовершенствам формы под действием минимальным напряжением, см. рис. 1.59б;

- 4) рассчитать сопротивление потере общей устойчивости в соответствии с п. 6.2 части 1-3 Еврокода-3 по изгибной, крутильной формам или из плоскости (в зависимости от формы потери устойчивости) для элемента полной длины с эффективным поперечным сечением по 2) и 3).

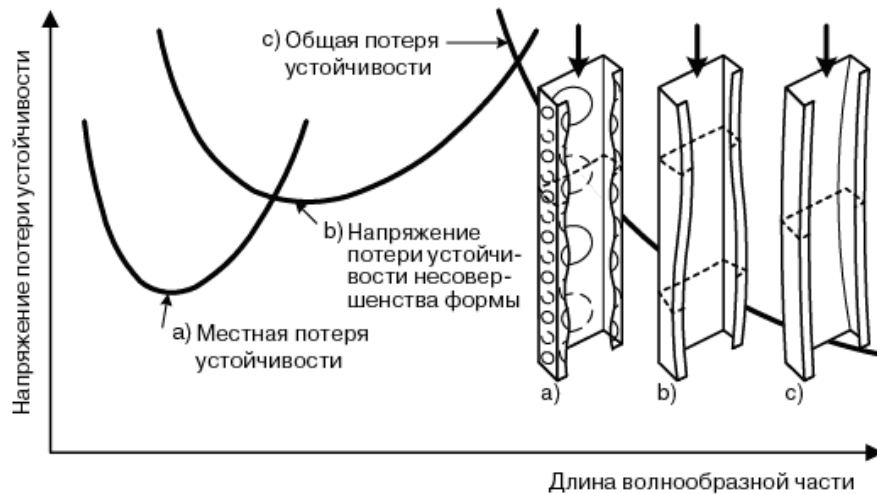


Рис. 1.59а. Примеры зависимости упругих критических напряжений для различных форм потери устойчивости от длины полуволны и примеры форм потери устойчивости.

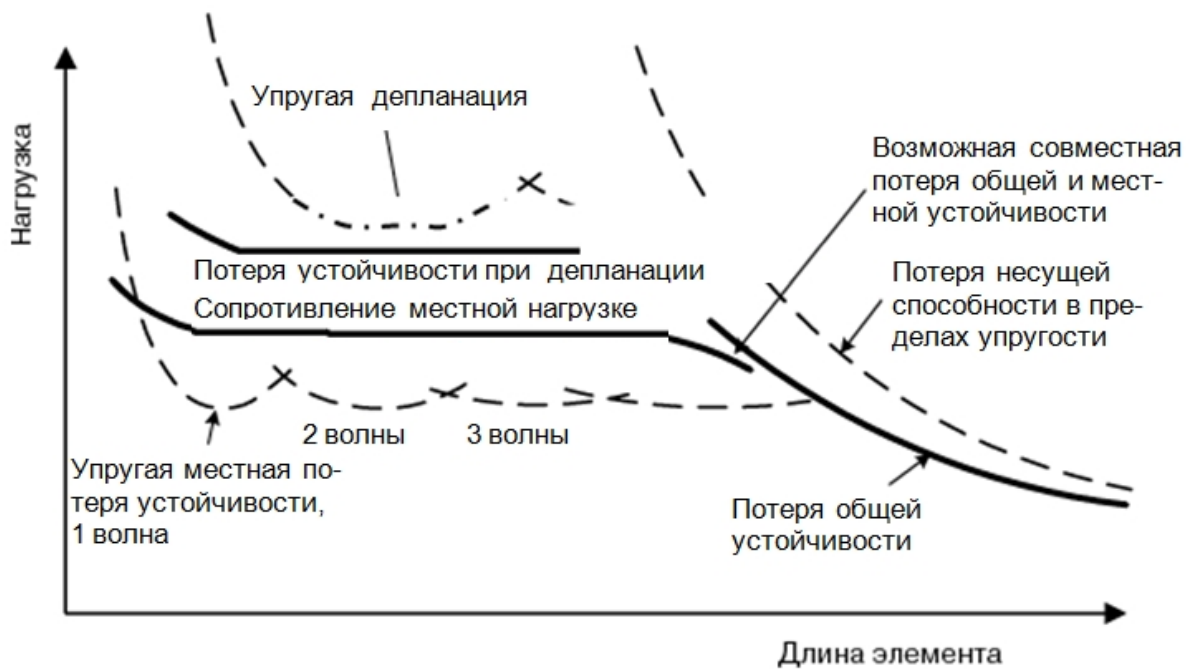


Рис. 1.59б. Зависимости упругой критической нагрузки и устойчивости от длины элемента

Плоские элементы без ребер жесткости

1) Эффективная ширина элементов без элементов жесткости должна быть определена по EN 1993-1-5, используя теоретическую ширину b_p для b .

Таблица 1.7

Сжатые элементы поперечного сечения

Максимальное сжатие на свободном продольном крае		
Распределение напряжений	Эффективные ширина и толщина	Коэффициент устойчивости
	$1 \geq \psi \geq 0$ $b_{e0} = 0,42b_p$ $t_{eff} = (1,75\rho - 0,75)t$	$1 \geq \psi \geq -2$ $k_{\sigma} = \frac{1,7}{3 + \psi}$
	$\psi < 0$ $b_{e0} = \frac{0,42b_p}{(1 - \psi)} + b_t < b_p$ $b_t = \frac{\psi b_p}{(\psi - 1)}$ $t_{eff} = (1,75\rho - 0,75 - 0,15\psi)t$	$-2 > \psi \geq -3$ $k_{\sigma} = 3,3(1 + \psi) + 1,25\psi^2$
	$1 \geq \psi \geq 0$ $b_{e0} = 0,42b_p$ $t_{eff} = (1,75\rho - 0,75)t$	$1 \geq \psi \geq 0$ $k_{\sigma} = \frac{1,7}{1 + 3\psi}$
	$\psi < 0$ $b_{e0} = \frac{0,42b_p}{(1 - \psi)}$ $b_t = \frac{\psi b_p}{(\psi - 1)}$ $t_{eff} = (1,75\rho - 0,75)t$	$0 \geq \psi \geq -1$ $k_{\sigma} = 1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$
	$\psi < -1$ $k_{\sigma} = 5,98(1 - \psi)^2$	$\psi < -3$ $k_{\sigma} = 0,29(1 - \psi)^2$

2) Теоретическая ширина b_p плоского элемента должна быть определена по рис. 5.3 раздела 5.1.4. части 1-3 Еврокода-3. В этом случае для плоских элементов на наклонных стенках принимается соответствующая наклонная высота.

Замечание: Для остальных случаев более точный метод расчета эффективной ширины дается в приложении D.

3) При использовании метода из EN 1993-1-5 могут быть использованы следующие положения:

- соотношение напряжений на начале и конце продольного участка (например, полки швеллера или двутавра) ψ из таблицы 1.7, используемое для определения эффективной ширины полок профиля под действием градиента напряжений, может быть основано на характеристиках полного сечения;
- соотношение напряжений на начале и конце продольного участка ψ из табл. 1.7, используемое для определения эффективной ширины стенки, может быть получено, используя эффективную площадь сжатой полки и полную площадь стенки;
- характеристики эффективного сечения могут быть определены, используя соотношение напряжений на начале и конце продольного участка ψ , основанное на эффективном поперечном сечении, уже полученном вместо полного сечения. Минимальное количество попыток в итерационном процессе с градиентом напряжений равно двум;
- приближенный метод, приведенный в 5.5.3.4 части 1-3 Еврокода-3, может быть использован для случая стенок трапецеидальных листов, находящихся под градиентом напряжений.

1.7.5. Конструктивные мероприятия по предотвращению потери устойчивости

Сжатые элементы из одиночного профиля рекомендуется укреплять планками или решеткой.

В местах приложения сосредоточенной нагрузки к сжатой полке, а также в опорных сечениях несущего элемента стенку рекомендуется укреплять ребрами жесткости и не рассчитывать ее прочность. В этих местах перфорированную стенку следует укреплять обязательно.

Прогоны из одиночных С-образных профилей с высотой стенки от 100 до 250 мм, расположенных параллельно друг другу с шагом не более

600 мм, рекомендуется использовать для междуэтажных и чердачных перекрытий.

Прогоны из термопрофилей ТН рекомендуется крепить верхними полками к поперечным балкам или нижним поясам ферм с помощью самонарезающих винтов

Балки рекомендуется выполнять из спаренных профилей одного типа с высотой стенки от 150 до 250 мм. Профили составной балки должны соединяться друг с другом двумя рядами самонарезающих винтов с шагом не менее 300мм.

Балки из одиночных профилей марок С 200-250 и ПС 200-250 можно использовать в качестве стропил

На опорах и в местах приложения к поясу балки или прогона сосредоточенных нагрузок должны быть установлены поперечные ребра жесткости на всю высоту сечения балки.

Элементы обрешетки выполняются из профилей ОУ пролетом не более 1,2 м. при шаге 400-500мм.

Перфорированные профили ТН и ТС используются как прогоны, которые крепятся к нижним полкам стропильных балок или нижним поясам ферм (в покрытиях с чердаком) для закрепления внутренней обшивки и разрыва «мостиков холода»

1.8. ПЕРФОРИРОВАННЫЕ ПРОФИЛИ

1.8.1. Виды термопрофилей и их назначение

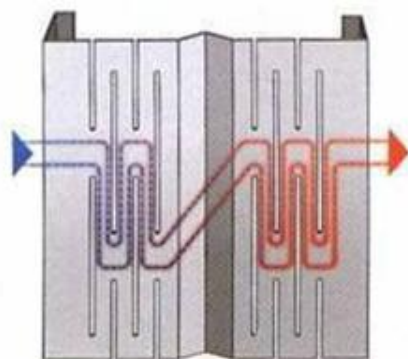


Рис.1.60. Удлиненный путь теплового потока в термопрофиле

В практике известно 3 типа термопрофилей:

- Просечной профиль с просечками, образованными вдавливанием (рис.1.61, а)
- Просечной профиль с просечками, образованными штамповкой (рис.1.61, б)

- Сетчатый профиль (рис.1.61, в)

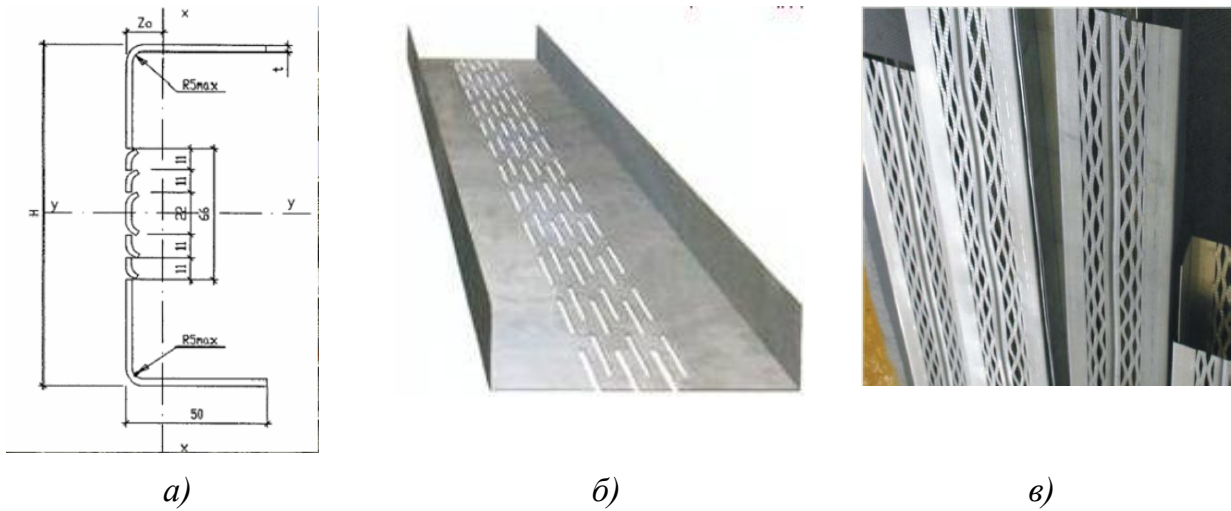


Рис. 1.61. Виды термопрофилей: а) – просечной (вдавливание); б) – просечной (штамповка); в) – сетчатый

1.8.2. Учет влияния просечек в строительных нормах

К сожалению, действующие СНиП по проектированию стальных конструкций [4] не дают полного ответа на данный вопрос. В главе 19 строительных норм, посвященной дополнительным требованиям по проектированию балок с перфорированной стенкой, содержатся детальные указания по проектированию и расчету балок с перфорацией всего лишь одного типа (В СНиП - рис. 23; здесь - рис.1.62). И рассматриваемому нами термопрофилю достаточно трудно подобрать эквивалентный профиль с перфорацией указанного типа, как минимум, по двум причинам. Во-первых, данные балки являются горячекатаными составного сварного сечения (а не холодногнутыми). А во-вторых, количество и форма отверстий перфорации далеко не соответствует термопрофилю.

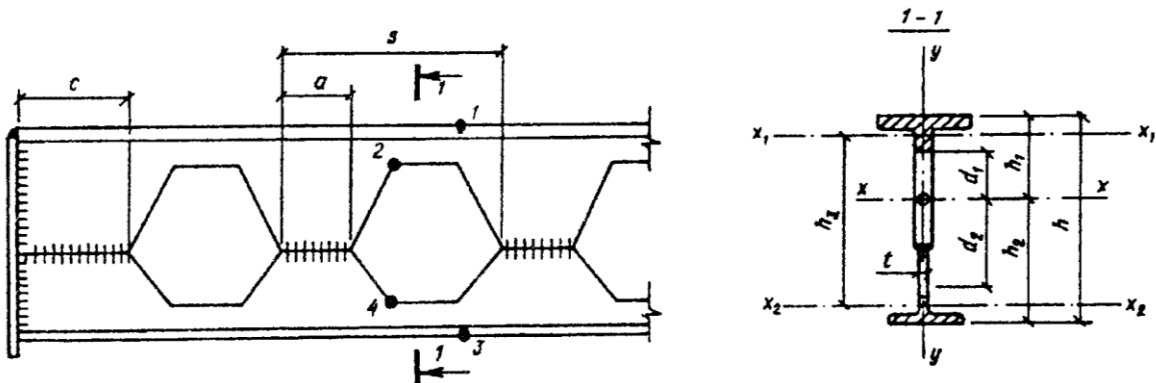


Рис. 1.62. Рассматриваемый тип перфорации в СНиП

Проанализировав данные табл. 49 СНиП, содержащие методику расчета (не будем останавливаться на ее детальном анализе), можно сделать вывод, что основной сложностью при моделировании просечек является определение геометрических характеристик поперечного сечения.

Более детальное решение данной проблемы содержится в Еврокоде [3], п. 10.4. Данный нормативный документ посвящен проектированию именно проектированию холодногнутых элементов (дополнительные требования). И приведенные там рекомендации по расчету так называемых «эффективных» толщин профиля $t_{a,eff}$, $t_{b,eff}$ и $t_{c,eff}$ действительно являются ценными для проектировщика.

Однако и в них содержится оговорка: «Эти правила расчета дают значения с запасом. Более экономичные решения могут быть получены по расчету, основанному на испытаниях...».

1.8.3 Учет влияния просечек в Еврокоде-3

Еврокод-3 (а именно часть 1-3, посвященная методикам расчета холодногнутых элементов и листов) предлагает следующую методику учета просечек, которую можно использовать в практических инженерных расчетах. Эта методика основана на теории эффективных толщин, на которые заменяется перфорированная зона.

Итак, настил из перфорированных листов может быть рассчитан, при условии, что правила для сплошного настила модифицированы введением эффективной толщины, приведенной ниже.

Замечание: Эти правила расчета дают значения с запасом. Более экономичные решения могут быть получены по расчету, основанному на испытаниях

Принимая, что $0,2 \leq d/a \leq 0,8$ характеристики полного сечения могут быть рассчитаны, используя 5.1.2 части 1-3 Еврокода-3, но заменив t на $t_{a,eff}$, полученную по формуле:

$$t_{a,eff} = 1,18t (1 - 0,9d / a) \quad (1.259)$$

где:

d – Диаметр отверстий перфорации;

a – расстояние между центрами отверстий перфорации.

1) Принимая, что $0,2 \leq d/a \leq 1,0$ характеристики эффективного сечения могут быть рассчитаны, используя раздел 4, но заменив t на $t_{b,eff}$, полученную из:

$$t_{b,eff} = t \sqrt[3]{1,18 (1 - d / a)} \quad (1.260)$$

2) Сопротивление одной стенки на местные поперечные силы может быть рассчитано, используя 6.1.9, но заменив t на $t_{c,eff}$, полученную по формуле

$$t_{c,eff} = t \left[1 - (d - a)^2 s_{per} / s_w \right]^{3/2} \quad (1.261)$$

где:

S_{per} – наклонная высота перфорированной части стенки;

S_w – общая наклонная высота стенки.

1.8.3. Моделирование просечек в виде локального уменьшения толщины профиля

В работе Ватина-Поповой [10] объектом исследования является тонкостенный стержень из термопрофиля, работающий под нагрузкой, как основа легких металлических каркасных конструкций. Расчет соединений профилей и конструкции узлов не рассматривались. Основными задачами данной работы явилось определение влияния области перфорации на расчет стержня и рассмотрение картины возникающих перемещений по всей длине элемента.

В качестве исследуемого профиля тонкостенного стержня выбран профиль ТН-175-1,2 как наиболее типичный, широко применяемый и отражающий особенности профилей данного типа, рис. 2.1. Стержень имеет шесть продольных дорожек с просечками.

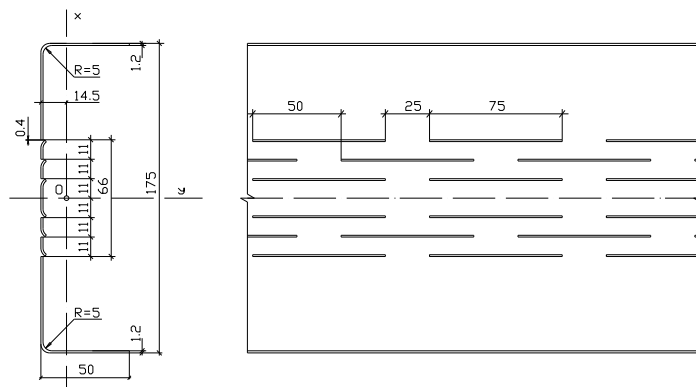


Рис. 1.63. Схема исследуемого стержня

Наличие просечек существенно осложняет исследование характеристик стержня из термопрофиля. Оценим влияние просечек на геометрические характеристики сечения стержня, а следовательно, и на жесткостные характеристики стержня.

В работе было проведено сравнение геометрических характеристик для нескольких типов профилей различной толщины, а именно, профиля С-100-0.8, С-120-1.0, С-150-1.2.

Исследование было проведено расчетным путем, без натурных испытаний. Для расчетов была использована программа ТОНУС, а так же «Рекомендации...»[1], разработанные крупным специалистом в области тонкостенных стержней Э.Л. Айрумяном.

Программа ТОНУС создана группой разработчиков SCAD Group и является программой-сателлитом в расчетном комплексе SCAD Office [5]. Программа производит расчеты по теории В.З. Власова для стержней с открытым профилем и по теории Е.А. Бейлина для стержней замкнутого профиля.

В работе показано, что значения, приведенные в «Рекомендациях...» [1] отличаются от значений, полученных в ТОНУСе. Наибольшая разница в значениях характеристик профилей составила 32,3%.

Такое расхождение является весьма значительным. Это произошло за счет того, что в рекомендациях по проектированию приведенные геометрические характеристики определены на основе редуцированной площади.

Редуцированная площадь – это площадь, уменьшенная за счет умножения на редуцирующий коэффициент. Редуцированная (уменьшенная) площадь сечения граней, потерявших местную устойчивость, определялась с учетом требования табл.6 СНиП 11-23-81* «Стальные конструкции».

Метод редуцированной площади применяется в расчетах на сжатие и изгиб. При расчете на растяжение указания рекомендуют применять истинные значения.

Из этого можно сделать вывод, что при расчетах вручную необходимо для быстроты работы использовать рекомендации «Пособия к СНиП...». Для расчетов с использованием программных комплексов на основе результатов ТОНУС необходимо использовать дополнительные коэффициенты условий работы и выполнять рекомендации по конструированию.

При моделировании и расчете характеристик стержня сложность представляет задание сечения с просечками.

Представление просечек в виде продольных сплошных прорезей приводит к сечению из несвязных частей, и Тонус проводит только его неполный расчет. Момент инерции при свободном кручении, секториальный момент инерции, координата центра изгиба по оси Y , координата центра изгиба по оси Z , внутренний и внешний периметр не рассчитывается. Использование таких характеристик для задания параметров стержня в SCAD представляется невозможным.

В работе предложено моделировать просечки в Тонусе в виде локального уменьшения толщины металла в сечении. При этом толщина металла в месте расположения просечки в сечении уменьшается пропорционально отношению длины продольного расстояния между просечками к сумме длины просечки и длины продольного расстояния между просечками.

Толщина исследуемого профиля составляет 1,2 мм и, следовательно, толщина локального утоньшения составит 0,3 мм.

Ширина локального утоньшения металла задается в пределах от 0 мм (используем аналогичный профиль ПН-175-1,2) до 270 мм, т.е. полной ширины заготовки.

В работе были исследованы зависимость изменения момента сопротивления от изменения длины локального утоньшения металла и зависимость момента сопротивления от толщины сечения профиля.

Сопоставив графики, отражающие эти зависимости (рис 1.64), было установлено, что при расчетах, замещение стержня, имеющего просечки эквивалентным ему по высоте стержню без просечек той же площади не является оптимальным путем решения задачи. Поскольку запас при этом методе расчета является очень большим, что технически не оправдано и экономически не выгодно.

С позиции исследования геометрических характеристик было выяснено, что влияние просечек на геометрические характеристики профиля не является существенным.

При моделировании просечек как локального утоньшения металла, даже при площади утоньшения больше эквивалентной ему площади просечек геометрические характеристики изменяются в пределах 5%. Опреде-

ление геометрических характеристик при исключении перфорированной части стенки не проводилось.

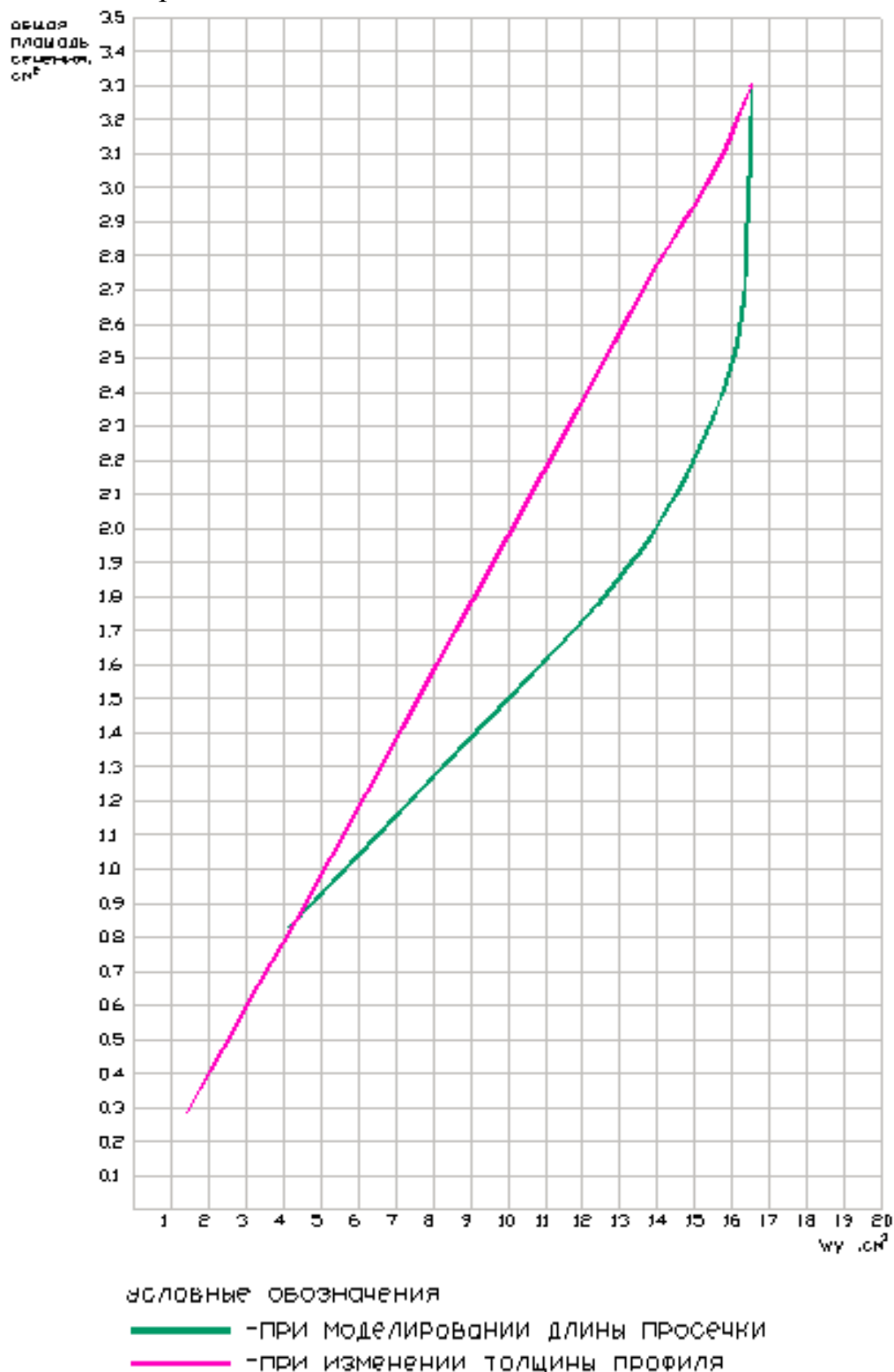


Рис. 1.64. Графики зависимости момента сопротивления от площади сечения стержня

1.9. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ПОПЕРЕЧНО ИЗГИБАЕМЫХ ПРОСЕЧНО-ПЕРФОРИРОВАННЫХ ШВЕЛЛЕРОВЫХ БАЛОК ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Итак, на основании материала, изложенного в разделах 1.1-1.8, и проведенных исследований может быть предложен следующий алгоритм расчета стальных холодногнутых тонкостенных просечно-перфорированных стержней открытого швеллерового профиля, находящихся в условиях поперечного изгиба (рис. 1.65.).

1. Уточнение геометрических характеристик профиля

При расчете геометрических характеристик необходимо учитывать поправочные коэффициенты (табл. 1.8).

Таблица 1.8

Значения поправочных коэффициентов геометрических характеристик

Наименование коэффициента	Обозначение	Значение
(1)	(2)	(3)
Поправка на радиус инерции i_x	k_{iz}	1,04
Поправка на радиус инерции i_y	k_{iy}	1,03
Поправка на площадь поперечного сечения A	k_A	1,03
Поправка на момент сопротивления сечения W_y	k_{Wy}	1,10
Поправка на момент сопротивления сечения W_z	k_{Wz}	1,03
Поправка на момент инерции сечения I_y	k_{Iy}	1,03
Поправка на момент инерции сечения I_z	k_{Iz}	1,03
Поправка на момент при свободном кручении сечения I_t	k_{It}	1,07
Поправка на секториальный момент инерции I_ω	$k_{I\omega}$	1,04
Поправка на прочие геометрические характеристики	k_v	1,10

В частности, приведенные характеристики не могут быть использованы при расчете по теории Э.Л. Айрумяна, изложенной в [1].

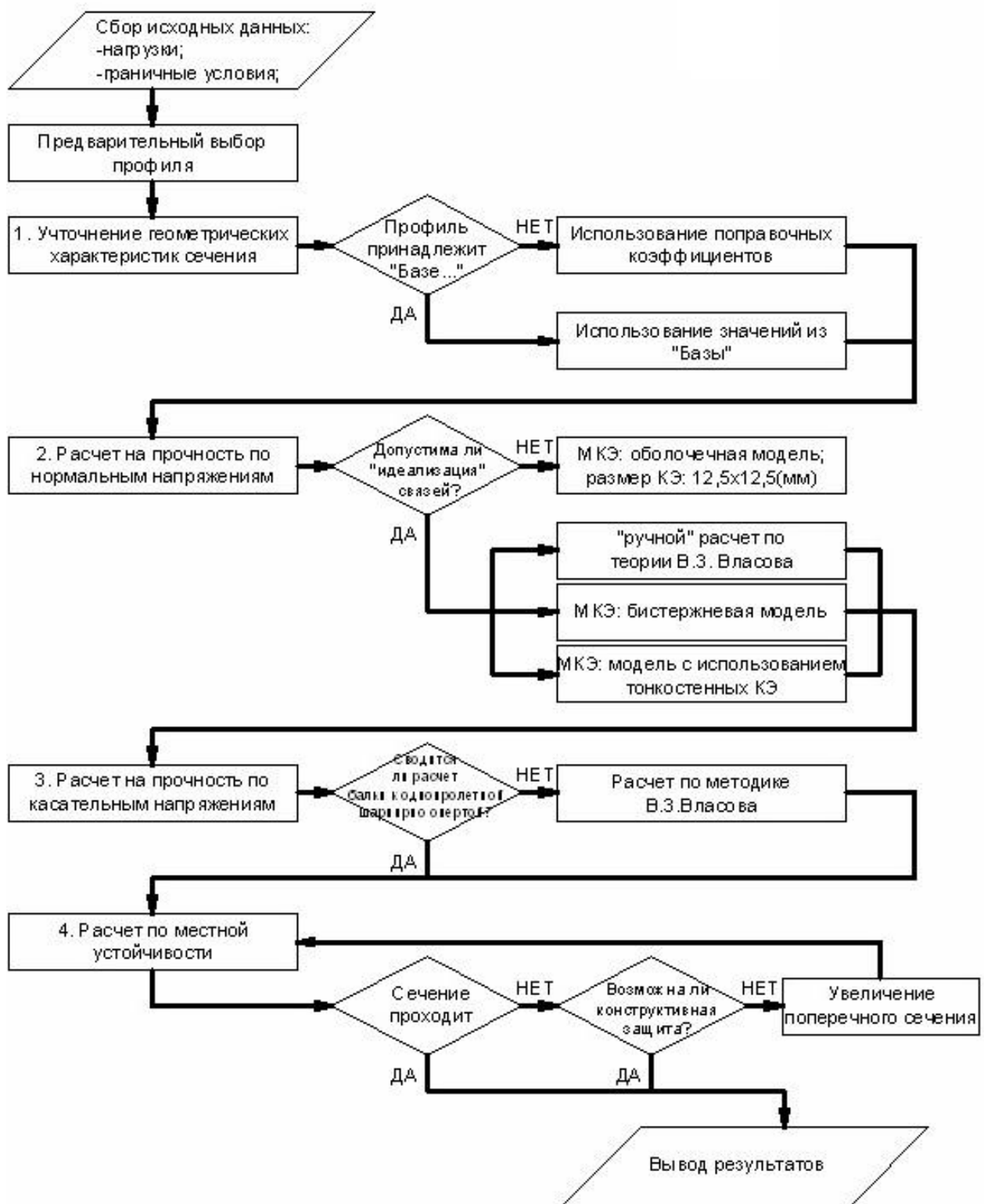


Рис. 1.65 Предлагаемый алгоритм расчета

2. Расчет на прочность

При расчете на прочность необходимо учитывать 2 типа напряжений: нормальные и касательные.

Расчет по нормальным напряжениям

Способ вычисления нормальных и касательных напряжений может быть выбран непосредственно инженером-проектировщиком. В настоящей работе рассмотрено 3 основных способа и предложено в качестве рекомендуемых к использованию:

А) по методике В.З. Власова

Согласно этой методике, тонкостенный стержень открытого профиля предлагается моделировать стержневым элементом, но при этом учитывать седьмую (дополнительную) степень свободы, которой соответствует седьмой силовой фактор – бимомент.

Теоретические основы методики В.З. Власова подробно изложены в разделе 1.3. В частности, теоретические предпосылки определения нормальных напряжений приведены в п. 1.3.6. Ключевой формулой расчета нормальных напряжений является формула (1.44), в которой, в отличие от формулы «классической» строительной механики, присутствует составляющая нормальных напряжений от бимоента $\frac{B_{\omega}}{W_{\omega}}$.

Примеры расчета по нормальным напряжениям приведены в главе 2 настоящего пособия.

Б) методом конечных элементов с использованием оболочечной модели

Теоретические основы МКЭ в классической постановке описаны в п.п. 1.5.1 и 1.5.2. Примеры расчета с описанием моделей приведены в главе 2.

В) методом конечных элементов с использованием бистержневой модели

Теоретические основы способа построения и анализа бистержневой модели подробно изложены в п.1.5.4.

Также может быть рекомендован к использованию и ***метод конечных элементов с использованием тонкостенных конечных элементов (ТКЭ)***, описанный в п. 1.5.3. Сложность использования такого способа заключается, в первую очередь, в том, что на сегодняшний день программные комплексы, содержащие в себе элементы и узлы с седьмой степенью

свободы, являются малораспространенными и доступны далеко не каждому инженеру-проектировщику.

Все эти способы, как будет показано в главе 2, дают схожие результаты при правильном выборе условий закрепления.

Понятно, что расчетная схема В.З. Власова с «идеализированными» условиями опирания далеко не всегда может соответствовать реальным конструкциям: не бывает идеально жестких и идеально шарнирных узлов. Точно так же бистержневая схема, а также схема с использованием ТКЭ, базирующиеся на методике В.З.Власова, должны использоваться очень осторожно. Эти схемы могут использоваться лишь в том случае, когда инженер-проектировщик твердо уверен, что условия сопряжения элементов проектируемой конструкции и их опирания могут быть сведены к идеализированным связям.

Расчет по касательным напряжениям

Как будет показано в главе 2, в случае поперечного изгиба, сопровождаемого стесненным кручением, однопролетной свободно опертой балки места возникновения максимальных касательных (на опорах) не совпадают с участками возникновения максимальных нормальных напряжений (в пролете). При этом наиболее опасными и, соответственно, решающими при подборе профиля, с точки зрения теорий прочности являются нормальные напряжения.

Это соответствует такому напряженно-деформированному состоянию, при котором изгибающий M момент и бимомент B достигают максимума в точках, в которых поперечная сила Q и крутящие моменты M_k и M_ω достигают своего минимума.

Поэтому касательные напряжения в однопролетных шарнирно закрепленных балках допускается не учитывать.

Что же касается некоторых других видов расчетных схем, таких как: консольная балка, трех- и многопролетная балка, балка с одним свободно опертым, а другим заделанным концом, в которых максимумы нормальных и касательных напряжений по длине балки могут совпадать, в зависимости от типа нагрузки, то в подобных случаях необходимо учитывать как нормальные, так и касательные напряжения. При этом рекомендуется использовать формулы (1.230) и (1.231), предложенные Э.Л. Айрумяном. Формула

(1.230) соответствует «энергетической» теории прочности применительно к стальным тонкостенным конструкциям.

Методика определения внутренних силовых факторов приведена в разделе 1.3.8; теоретические основы распределения касательных напряжений по сечению приведены в разделе 1.3.7; пример расчета по касательным напряжениям показан в главе 2.

Следует отметить, что результаты расчета п. 1.9.1. могут быть решающими при подборе сечения поперечно изгибаемых тонкостенных элементов по I группе предельного состояния лишь в случае, когда предусмотрена конструктивная защита балок, варианты которой описаны в п. 1.7.5. В остальных случаях необходимо делать проверку по устойчивости.

3. Расчет на общую устойчивость

В общем случае поперечного нагружения, как показано в главе 2, балка достигает состояния, соответствующего либо достижению напряжений площадки текучести, либо потери местной устойчивости, намного раньше, чем происходит потеря общей устойчивости.

Однако в реальных сооружениях возможны такие конструктивные схемы, при расчете которых потери устойчивости при изгибе может наступить несколько раньше потери прочности. В частности, если поперечный изгиб, сопровождаемый стесненным кручением, происходит при дополнительном внецентренном сжатии, например в наклонных стропильных конструкциях с достаточно большим уклоном.

В подобных случаях целесообразна дополнительная проверка на общую устойчивость.

Описание теории и методики расчета на общую устойчивость приведено в разделах 1.7.2 и 1.7.3. Пример расчета на общую устойчивость приведен в главе 2.

В подобных случаях возможно также использование расчетной схемы с учетом критических коэффициентов k_3 и k_4 , соответствующих нулевой секториальной жесткости EI_ω , которая характерна для изгибаемых пластин, и приведенных в табл. 1.5 и 1.6. При этом подобный расчет будет давать некоторый запас.

4. Расчет по местной устойчивости

Выводы

Итак, предлагаемый в данной главе алгоритм касается расчетов по несущей способности стальных тонкостенных просечно-перфорированных поперечно изгибаемых балок.

Предлагаемый алгоритм расчета может быть использован и для неперфорированных профилей, находящихся в условиях стесненного кручения. При этом этап расчета, описанный в п.1.9.1. (уточнение геометрических характеристик профиля), исключается из общего алгоритма.

При этом следует оговорить, что приведенный алгоритм не учитывает начальных несовершенств сечений, физической нелинейности материалов, а также зыбкости элементов. Поэтому для их учета необходимо вводить в формулы напряжений и коэффициентов потери устойчивости дополнительные соответствующие коэффициенты $k_{нн}$, $k_{фн}$ и $k_{зыб}$, либо предусматривать мероприятия по предотвращению соответствующих явлений, либо пользоваться другими известными методиками расчета в дополнение к предлагаемому алгоритму.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕПЛАНАЦИИ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ

2.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1.1. Описание исходных и искомых параметров модели

Основной моделью исследования служит свободно опертая однопролетная балка швеллерового тонкостенного профиля.

В качестве разновидностей модели исследования примем два тонкостенных профиля по ТУ 1108-011-70841391-2006:

- АИ ПН 150-50-1,5;
- АИ ПН 250-50-1,5.

Параллельно будем сравнивать результаты, полученные для более высокого профиля (АИ ПН 250-50-1,5) и для менее высокого профиля (АИ ПН 150-50-0,5).

Кроме того будем исследовать поведение этих профилей в условиях различного вида загрузки:

- 1) Равномерно распределенная погонная нагрузка:

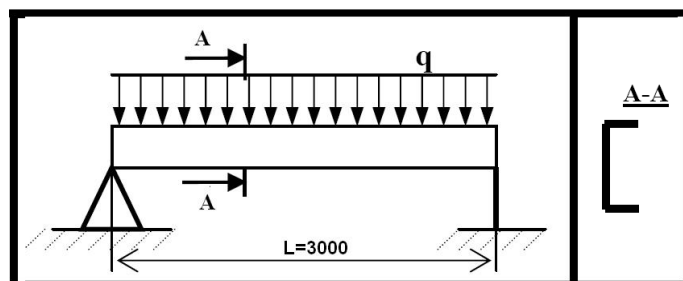


Рис. 2.1. Модель исследования. Общая расчетная схема (случай равномерно распределенной нагрузки)

- 2) Сосредоточенная нагрузка в одной точке:

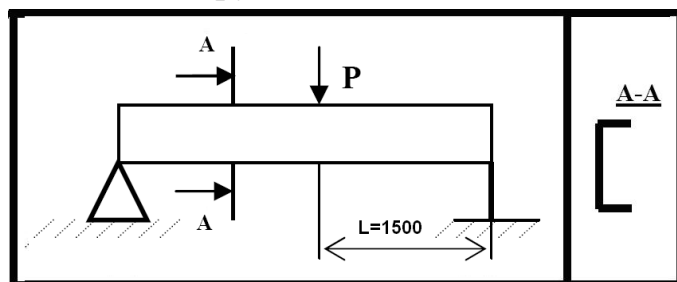


Рис. 2.2. Модель исследования. Общая расчетная схема

(случай сосредоточенной в одном месте нагрузки)

3) Сосредоточенная нагрузка в двух точках («равномоментная» балка)

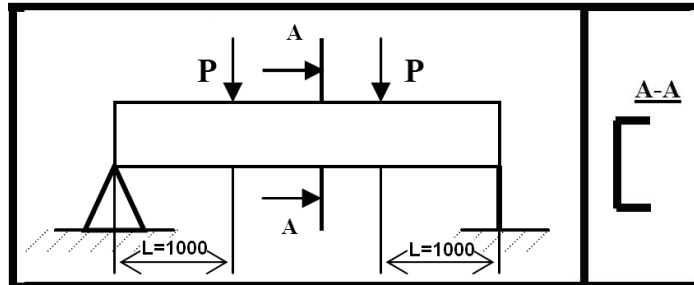


Рис.2.3. Модель исследования. Общая расчетная схема (случай сосредоточенной в двух местах нагрузки)

Для более качественного анализа результатов будем использовать различные методы, применяемые в современной строительной отрасли:

- аналитические и полуаналитические методы (раздел 2.2.);
- численные методы (раздел 2.3.);
- эмпирический метод (основан на испытаниях)

2.1.2. Основные физические гипотезы, лежащие в основе модели исследования

При исследовании модели примем следующие физические гипотезы, упрощающие моделирование объекта исследования, т. е. стальных тонкостенных балок.

Гипотеза континуальности. Согласно ей, материал занимает объем тела сплошь – без разрывов и пустот. Такое предположение, строго говоря, противоречит физическому учению об атомно-молекулярном строении тел. Однако гипотеза континуальности позволяет использовать теорию непрерывных функций – сравнительно простой и эффективный математический аппарат – и в то же время получать вполне удовлетворительные решения, сглаживая силовые взаимодействия между микрообъектами.

Гипотеза о ненапряженном начальном состоянии. В соответствии с этой гипотезой в ненагруженном теле внутренних сил нет. В любом теле всегда действуют межатомные внутренние силы. Они обеспечивают существование тела как геометрической единицы. Игнорирование внутренних сил, действующих в ненагруженном теле, приводит к тому, что в расчетах

определяются не сами внутренние силы, а добавки к ним, вызванные внешним воздействием. Использование этой гипотезы оправдывается тем, что механические характеристики материалов также определяются без учета начальных сил.

Гипотеза однородности. Однородным называется такое тело, свойства которого во всех точках одинаковы. В природе нет однородных тел, хотя бы в силу атомно-молекулярного их строения. Однако с некоторым приближением свойства материала осредненно можно считать одинаковыми во всем объеме. Гипотеза однородности освобождает от необходимости учета изменчивости механических свойств по объему, чем упрощает расчеты.

Гипотеза изотропии. Изотропным называется такой материал, свойства которого во всех направлениях одинаковы. Предпосылка об изотропии является приближенной. Тем не менее, для всех видов стали, в том числе и для рассматриваемых нами в работе С-255 и С-350, в силу хаотичной структурной ориентации можно считать свойства не зависящими от направления.

Гипотеза упругости. Тело, которое после устранения внешнего воздействия восстанавливает свои размеры и форму, называется упругим.

Реальные тела и материалы, строго говоря, не являются упругими. После каждого воздействия в них остаются некоторые отклонения от начальных размеров. Величины этих отклонений зависят от величин нагрузок. При небольших усилиях остаточные деформации невелики, материал можно считать упругим. При больших деформации существенны, наделять материал свойством упругости нельзя.

В упругом теле внутренние силы и деформации зависят только от тех нагрузок, которые действуют в рассматриваемый момент; от предшествующих воздействий никаких последствий не остается.

Кроме того, учитывая специфику технической теории расчета тонкостенных стержней, описанной в главе 1, примем также **геометрические гипотезы:**

- стержень рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким контуром;
- деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют.

2.2. РАСЧЕТ АНАЛИТИЧЕСКИМИ И ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

2.2.1. Определение ключевых геометрических характеристик сечения

Основным аналитическим способом, позволяющим адекватно оценить напряженно-деформированное состояние поперечно-изгибаемого тонкостенного стержня, является методика, предложенная В.З. Власовым и описанная в разделе 1.3. настоящей работы. Данный метод был впервые опубликован в 1940 году в монографии [2], за которую В.З. Власову была присуждена степень доктора технических наук.

Так же для сравнения покажем неприменимость классического способа, базирующегося на гипотезе плоских сечений и в то же являющегося составной частью методики В.З. Власова.

Для расчета модели по теории В.З. Власова в качестве исходных данных помимо габаритов расчетной схемы, необходимо знать еще и геометрические характеристики поперечного сечения профиля. Эти величины возьмем из результатов, полученных в предыдущей главе и приведенные в прил. 1. В табл. 2.1. и 2.2. представлены те геометрические характеристики профилей соответственно ПН-150-1,5 и ПН-250-1,5, которые понадобятся в дальнейшем расчете.

Таблица 2.1

Геометрические характеристики поперечного сечения профиля ПН 150-1,5

	Параметр	Значение	Единицы измерения
A	Площадь поперечного сечения	3,6403	см ²
I _t	Момент инерции при свободном кручении	0,0273	см ⁴
I _w	Секториальный момент инерции	316,91746	см ⁶
W _{u+}	Максимальный момент сопротивления относительно оси U	15,83269	см ³
I _u	Максимальный момент инерции	118,74525	см ⁴
Y _b	Координата центра изгиба по оси Y	-1,682	см

**Геометрические характеристики поперечного сечения профиля
ПН 250-1,5**

	Параметр	Значение	Единицы измерения
A	Площадь поперечного сечения	5,140	см ²
I _t	Момент инерции при свободном кручении	0,039	см ⁴
I _w	Секториальный момент инерции	1067,752	см ⁶
W _{u+}	Максимальный момент сопротивления относительно оси U	32,784	см ³
W _{v+}	Максимальный момент сопротивления относительно оси V	2,223	см ³
I _u	Максимальный момент инерции	409,794	см ⁴
I _v	Минимальный момент инерции	9,371	см ⁴
Y _b	Координата центра изгиба по оси Y	-1,368	см

Изгибо-крутильная характеристика, являющаяся физической постоянной поперечного сечения и математически представляющая собой характеристическое число дифференциального уравнения равновесия 4-го порядка, составит:

$$k = \sqrt{\frac{GJ_t}{EJ_\omega}} = 0,005764 \ (0,003753) \text{ см}^{-1}, \quad (2.1)$$

где: $G=0,81 \cdot 10^6$ кгс/см² – модуль сдвига стали С-255;
 $E=2,1 \cdot 10^6$ кгс/см² – модуль упругости стали С-255.

Примечание: в формуле (2.1) и далее в формулах (2.2-2.51) все получаемые значения относятся к профилю ПН-150-1,5, за исключением величин в скобках, относящихся к профилю ПН-250-1,5.

Дело в том, при приложении равномерно распределенной нагрузки и доведении ее до максимального (разрушающего) значения ввиду достаточно большой податливости профиля верхней полки, которая будет существенно деформироваться, профиль потеряет свою первоначальную геометрическую форму. Нагрузка, в большинстве случаев являясь «штамповой», т. е. более жесткой, чем профиль по своей природе, будет уже не вплотную прилегать к полке. Для косвенного учета этой геометрической нелинейно-

сти приложим нагрузку не равномерно по полке, а по закону треугольника, что является достаточно распространенным методом. Тогда результирующий вектор нагрузки пройдет через центр тяжести эпюры нагрузки, лежащей в точке пересечения медиан треугольника, т.е. на расстоянии $\frac{b}{3}$ от края стенки.

Как видно из рис. 2.4, полный эксцентриситет приложения нагрузки будет складываться из эксцентриситета, обусловленного несовпадением центра тяжести и центра изгиба поперечного сечения α_x , (равного Y_b -координате центра изгиба по оси y) и непосредственного эксцентриситета приложения нагрузки, равного:

$$e = \alpha_x + \frac{b}{3} = 1,682 + \frac{5}{3} = 3,35 \text{ (3,03) см} \quad (2.2)$$

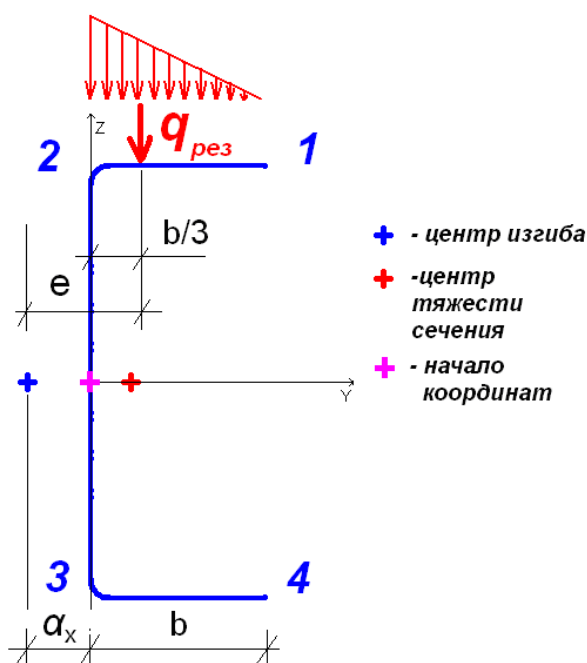


Рис. 2.4. Схема осей координат и приложения нагрузки, нумерация точек

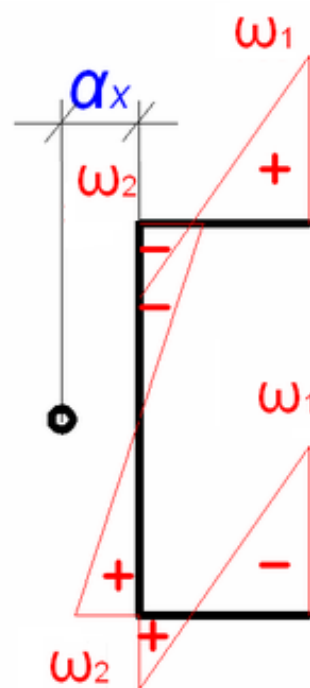


Рис. 2.5. Эпюра секториальных координат

Эпюра секториальных координат профиля представлена на рис. 2.5. Максимальные секториальные координаты необходимы для выявления напряжения от бимоента и составят:

$$\omega_1 = (\alpha_x - b) \frac{h}{2} = (1,682 - 5) \frac{15}{2} = 24,9 \text{ (45,4) см}^2 \quad (2.3)$$

$$\omega_2 = \alpha_x \frac{h}{2} = 12,6 \text{ (17,1) см}^2 \quad (2.4)$$

2.2.2. Балка, нагруженная равномерной нагрузкой

Расчет по нормальным напряжениям

Максимальный изгибающий момент окажется в середине пролета и составит:

$$M_y = \frac{ql^2}{8} = \frac{1 \cdot 3^2}{8} = 1,125 \text{ кг м} = 112,5 \text{ кг см} \quad (2.5)$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 2.6

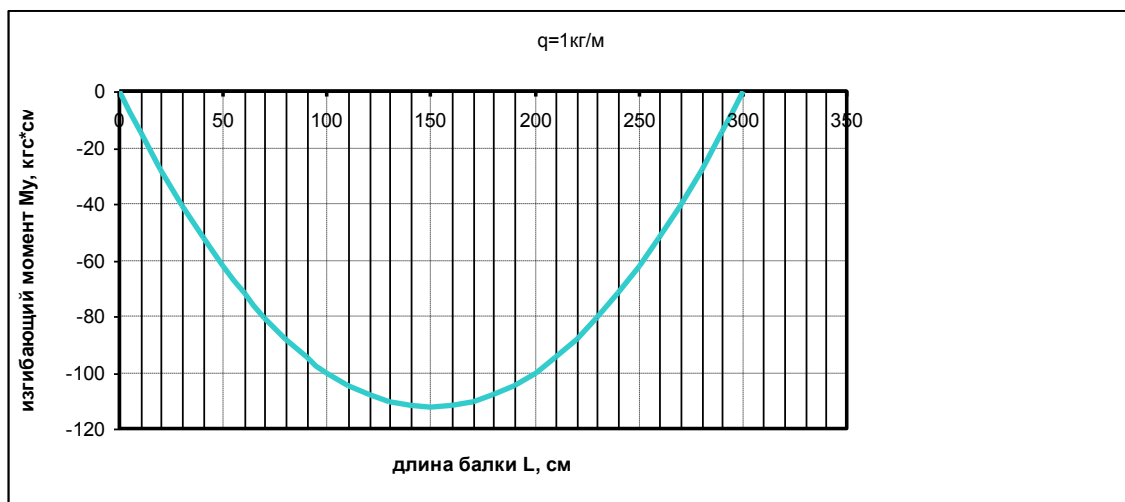


Рис. 2.6. Эпюра изгибающих моментов

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 2.6

Бимомент будет распределяться по длине балки по следующему закону, полученному в п. 1.3.8 (формула 1.84) на основании решения системы дифференциальных уравнений (1.30) с заданием соответствующих граничных условий:

$$B_\omega = \frac{qe}{k^2} \left(1 - \frac{ch \frac{k(l-2x)}{2}}{ch \frac{kl}{2}} \right) \quad (2.6)$$

Эпюра бимоментов, в некоторой степени, подобна эпюре изгибающих моментов и представлена на рис 2.7. Хотя эпюра изгибающих моментов описывается параболической зависимостью, а эпюра бимоментов – экспоненциальной, выраженной посредством гиперболических функций.

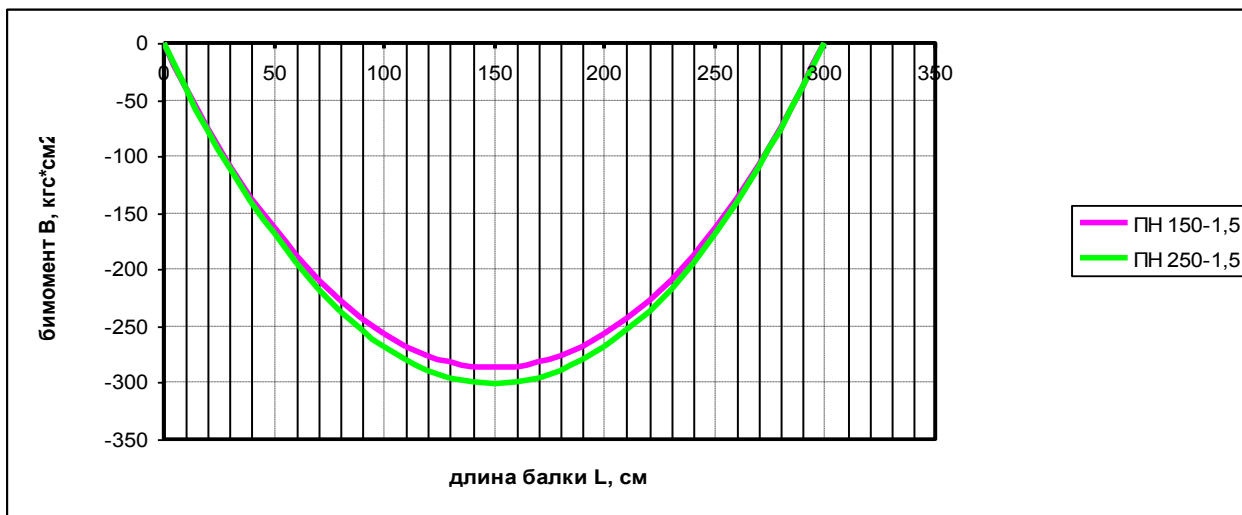


Рис. 2.7. Эпюра бимоментов

Максимальный бимомент составит

$$B_{\omega} = \frac{qe}{k^2} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{kl}{2}}\right) = \frac{0,01 \cdot 3,35}{0,005764^2} \left(1 - \frac{1}{1,398}\right) = 287,06 \text{ кг см}^2 \quad (2.7)$$

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ возникающие наиболее напряженном поперечном сечении, находящемся в середине пролета, окажутся различными в четырех характерных точках (1,2,3 и 4 соответственно) поперечного сечения и составят:

$$\sigma_1 = \sigma_{x1} + \sigma_{\omega_1} = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_1 \quad (2.8)$$

$$\sigma_1 = -\frac{112,5}{15,83} + \frac{287,06}{316,32} \cdot 24,9 = -7,107 + 22,597 = +15,49 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_{x2} + \sigma_{\omega_2} = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (2.9)$$

$$\sigma_2 = -\frac{112,5}{15,83} - \frac{287,06}{316,32} \cdot 12,6 = -7,107 - 11,434 = -18,54 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_{x3} + \sigma_{\omega_3} = +\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (2.10)$$

$$\sigma_3 = +\frac{112,5}{15,83} + \frac{287,06}{316,32} \cdot 12,6 = +7,107 + 11,434 = +18,54 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_4 = \sigma_{x4} + \sigma_{\omega 4} = + \frac{M_y}{W_y} - \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega_1 \quad (2.11)$$

$$\sigma_4 = + \frac{112,5}{15,83} - \frac{287,06}{316,32} \cdot 24,9 = +7,107 - 22,597 = -15,49 \text{ кг/см}^2$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис.

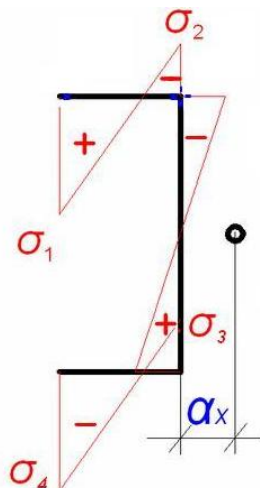


Рис. 2.8. Эпюра нормальных напряжений

Расчет по касательным напряжениям

В тонкостенных сечениях касательные напряжения имеют три составляющие: напряжения от поперечной силы, напряжения от крутящего момента и секториальные касательные напряжения, вызывающие так называемый изгибно-крутящий момент. Эти два крутящих момента составляют общий крутящий момент, для данной расчетной схемы описываемый зависимостью:

$$M_{o.k.} = M_\omega + M_\kappa = qe\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad (2.12)$$

Секториальный крутящий момент является производной функции бимоента (2.6) по длине балки и распределен по длине балки по следующей зависимости:

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} = \frac{qe}{k} \frac{sh\left(\frac{kl}{2} - kx\right)}{ch\frac{kl}{2}} \quad (2.13)$$

Тогда крутящий момент описывается зависимостью:

$$M_{\kappa} = M_{o.\kappa.} - M_{\omega} = \frac{qe}{k} \left(k \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{sh\left(\frac{kl}{2} - kx\right)}{ch\frac{kl}{2}} \right) \quad (2.14)$$

Эпюра общего крутящего момента представлена на рисунке 2.9. Эпюры крутящего и секториального крутящего моментов представлены соответственно на рисунках 2.10 и 2.11.

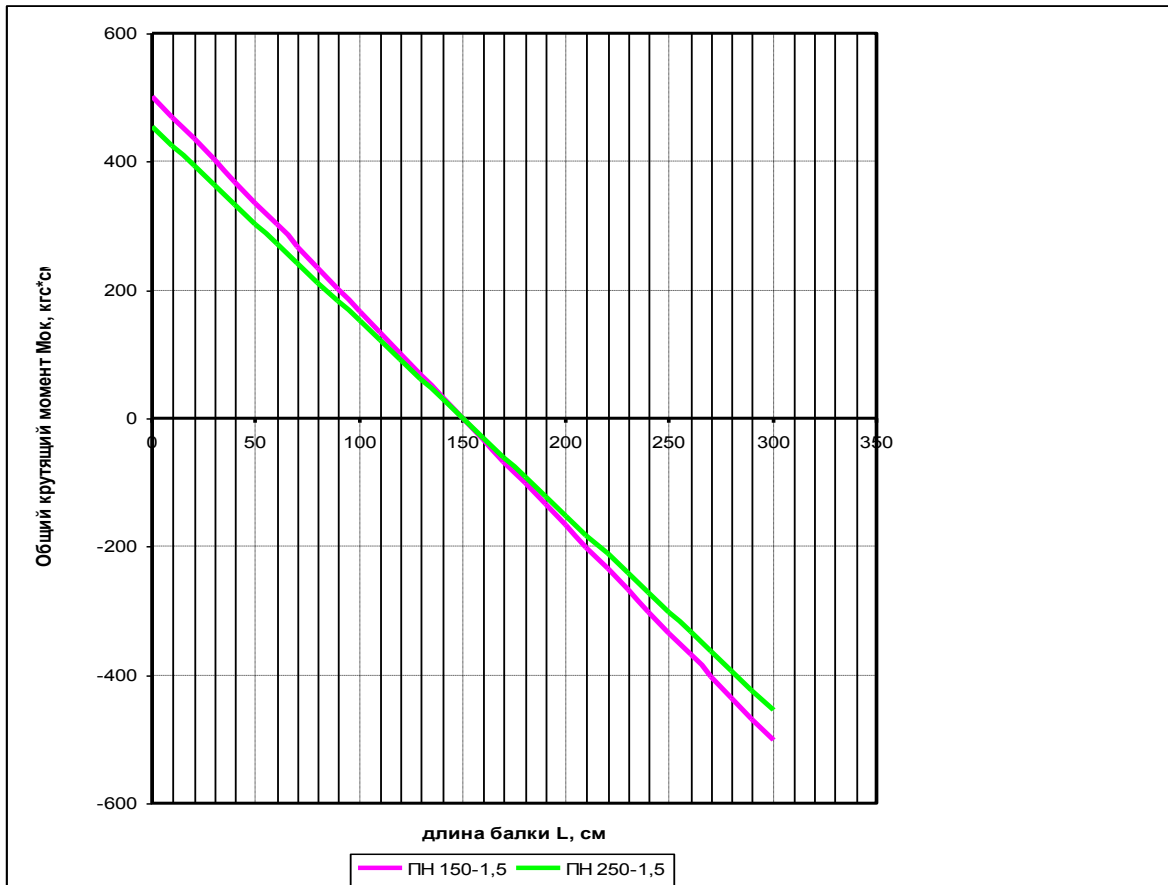


Рис. 2.9. Эпюра общего крутящего момента

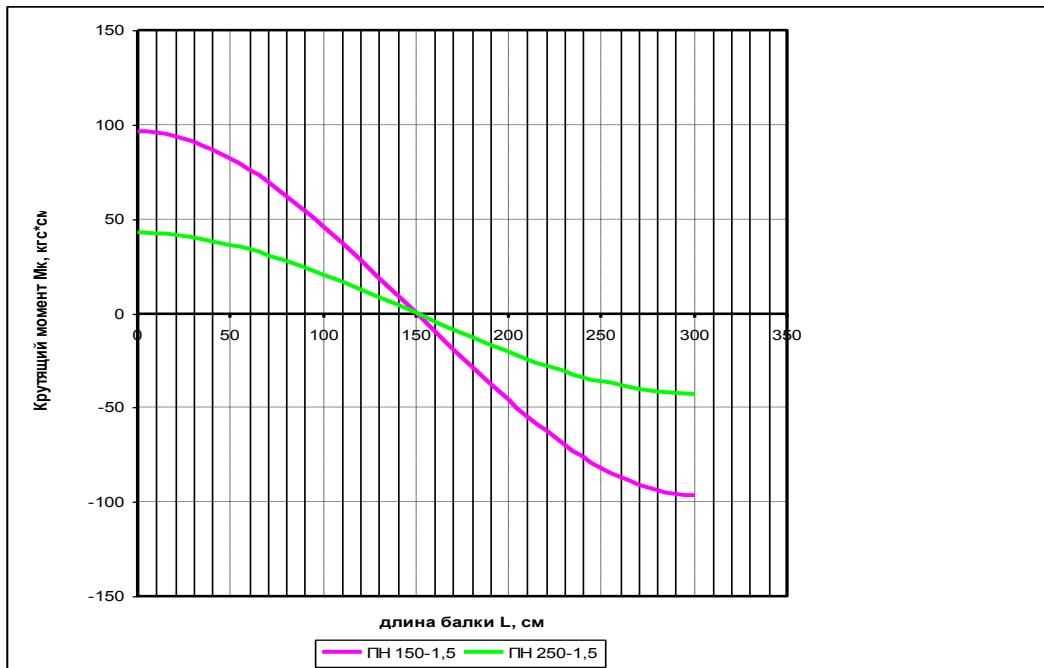


Рис. 2.10. Эпюра крутящего момента

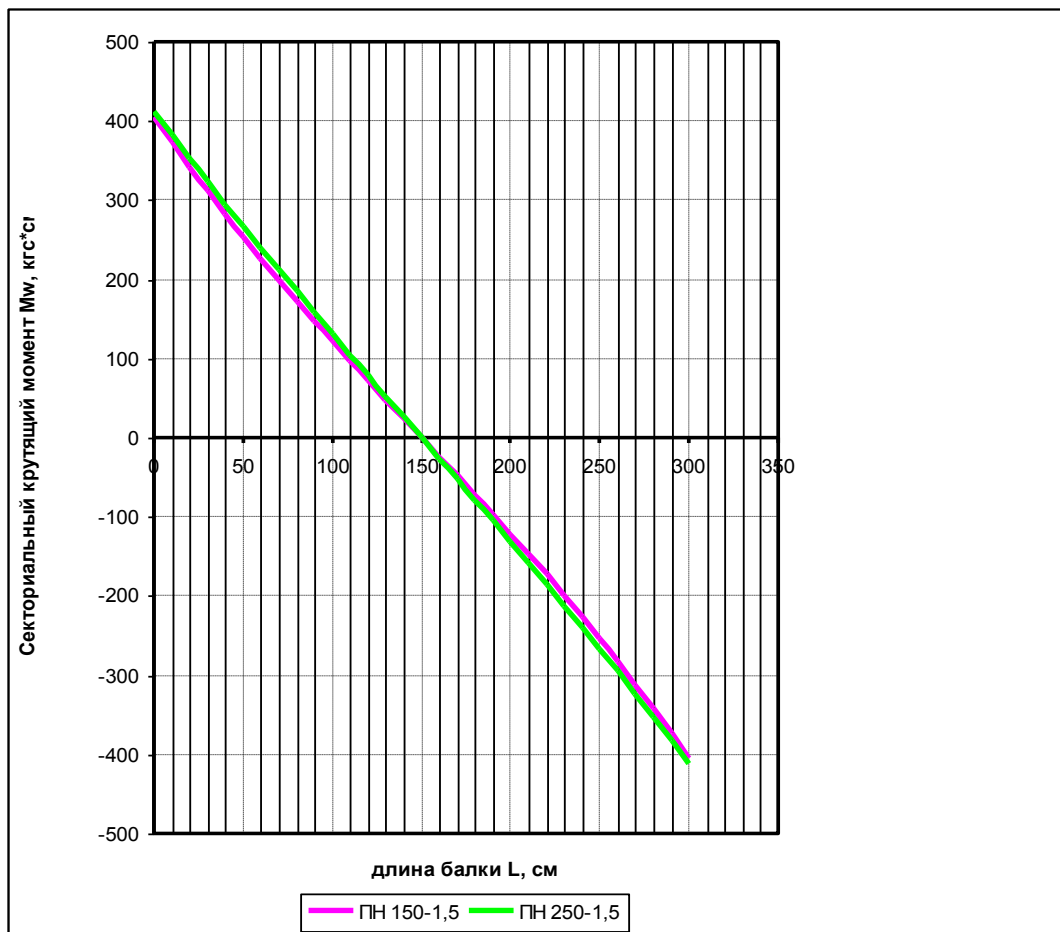


Рис. 2.11. Эпюра секториального крутящего момента

Как видно из графиков (рис.2.9-2.11), несмотря на очевидную статическую определимость балки, для разных профилей. Это еще раз свидетельствует о том, что бимомент, несмотря на то, что он является статическим силовым фактором, он не может быть найден только из статических уравнений равновесия и, следовательно, зависит от жесткостных характеристик поперечного сечения.

Максимальные крутящий и секториальный моменты окажутся в двух точках на опорах и составят соответственно:

$$M_{\kappa} = \frac{qe}{k} \left(k \frac{l}{2} - \frac{sh \frac{kl}{2}}{ch \frac{kl}{2}} \right) = \frac{0,01 \cdot 3,35}{0,005764} \left(0,005764 \frac{300}{2} - \frac{sh \frac{kl}{2}}{ch \frac{kl}{2}} \right) = 0,96 \text{ кгс см} \quad (2.15)$$

$$M_{\omega} = \frac{qe}{k} \frac{sh \frac{kl}{2}}{ch \frac{kl}{2}} = \frac{0,01 \cdot 3,35}{0,005764} \frac{sh \frac{kl}{2}}{ch \frac{kl}{2}} = 4,06 \text{ кгс см} \quad (2.16)$$

Максимальный общий крутящий момент окажется равным

$$M_{o.k.} = qe \frac{l}{2} = 0,01 \cdot 3,35 \cdot \frac{300}{2} = 5,025 \text{ кгс см} \quad (2.17)$$

Поперечная сила, возникающая в сечении балки, описывается законом:

$$Q_z = q \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (2.18)$$

Эпюра поперечной силы представлена на рис. 2.12

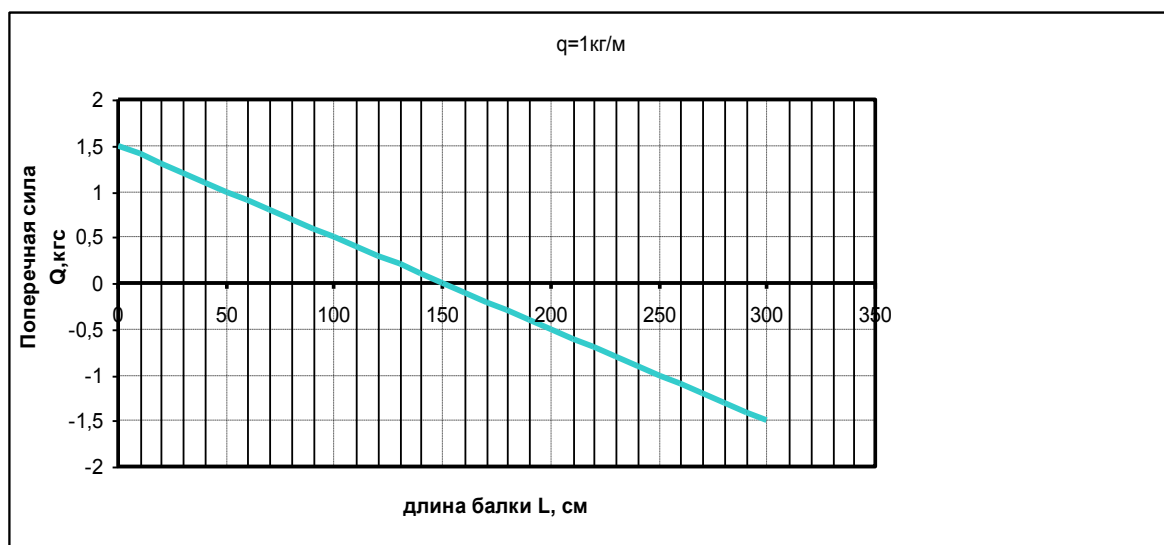


Рис. 2.12. Эпюра поперечной силы

Максимальное значение поперечной силы окажется в опорном сечении:

$$Q_z = q \frac{l}{2} = 0,01 \frac{300}{2} = 1,5 \text{ кгс} \quad (2.19)$$

Проанализируем теперь основные геометрические характеристики, необходимые для вычисления касательных напряжений.

Рассмотрим эпюру распределения секториальных статических моментов S_ω (рис. 2.13). Как было показано в разделе 1.3.4, секториальный статический момент в точках 2 и 3 составит:

$$S_{\omega 2} = S_{\omega 3} = \frac{bh\delta}{4}(b - 2\alpha_x) = \frac{5 \cdot 15 \cdot 0,15}{4}(5 + 2 \cdot 1,682) = 23,52 \text{ см}^4 \quad (2.20)$$

Максимальный секториальный статический момент окажется в точке, в которой секториальная координата равна нулю (см. рис. 3.5), и равен:

$$S_{\omega(\max)} = \frac{h\delta}{4}(b - \alpha_x)^2 = \frac{15 \cdot 0,15}{4}(5 + 1,682)^2 = 25,12 \text{ см}^4 \quad (2.21)$$

Что же касается распределения статических моментов S_x , статический момент в точках 2 и 3 равен:

$$S_{y2} = S_{y3} = \frac{bh\delta}{4} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 0,15}{4} = 4,69 \text{ см}^3 \quad (2.22)$$

Максимальный статический момент окажется в середине стенки:

$$S_{y(\max)} = \frac{bh\delta}{2} + \frac{\delta h^2}{8} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 0,15}{2} + \frac{0,15 \cdot 15^2}{8} = 9,84 \text{ см}^3 \quad (2.23)$$

Эпюра статических моментов показана на рис. 3.14

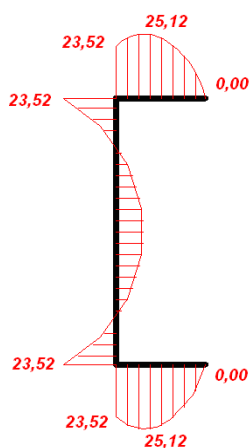


Рис. 2.13. Эпюра секториальных статических моментов S_ω

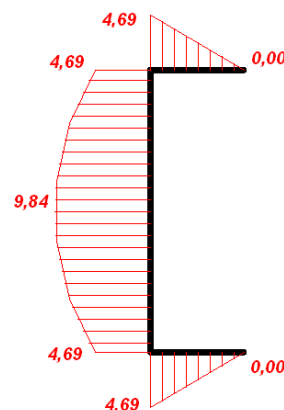


Рис. 2.14. Эпюра статических моментов S_x

Проанализируем теперь непосредственно касательные напряжения, возникающие на опорах.

Касательные напряжения от изгибно-крутящего момента в точках 2 и 3:

$$\tau_{\omega 2} = \tau_{\omega 3} = \frac{M_{\omega} S_{\omega 2}}{I_{\omega} \delta} = \frac{4,06 \cdot 23,52}{316,92 \cdot 0,15} = 2,01 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.24)$$

Максимальные касательные напряжения от изгибно-крутящего момента:

$$\tau_{\omega \max} = \frac{M_{\omega} S_{\omega \max}}{I_{\omega} \delta} = \frac{4,06 \cdot 25,12}{316,92 \cdot 0,15} = 2,15 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.25)$$

Кососимметричный характер и направление секториальных касательных напряжений показаны на рис. 2.15.

Касательные напряжения от поперечной силы Q_z в точках 2 и 3 определяются по формуле Д. Журавского:

$$\tau_{u_{z(z)2}} = \tau_{u_{z(z)3}} = \frac{Q_z S_{y2}}{I_y \delta} = \frac{1,5 \cdot 4,69}{118,75 \cdot 0,15} = 0,39 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.26)$$

Максимальное касательное напряжение от поперечной силы Q_z окажется, как и максимальный статический момент, в середине полки и составит:

$$\tau_{u_{z(z) \max}} = \frac{Q_z S_{y \max}}{I_y \delta} = \frac{1,5 \cdot 9,84}{118,75 \cdot 0,15} = 0,83 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.28)$$

Ввиду отсутствия поперечной силы по оси y соответствующие касательные $\tau_{u_{z(y)}}$ напряжения окажутся равными нулю.

Касательные напряжения от крутящего момента M_k :

$$\tau_k = \frac{M_k \delta}{I_t} = \frac{0,96 \cdot 0,15}{0,0273} = 5,27 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.29)$$

Наибольшие суммарные касательные напряжения возникнут в точках 2 и 3:

$$\tau_{\max} = \tau_{\omega 2} + \tau_{u_{z(z)}} + \tau_k = 2,01 + 0,39 + 5,27 = 7,67 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.30)$$

Соответственно на другой грани полки касательные напряжения составят:

$$\tau_{\max} = \tau_{\omega 2} + \tau_{u_{z(y)2}} - \tau_k = 2,01 + 0,39 - 5,27 = -2,87 \text{ кгс/см}^2 \quad (2.31)$$

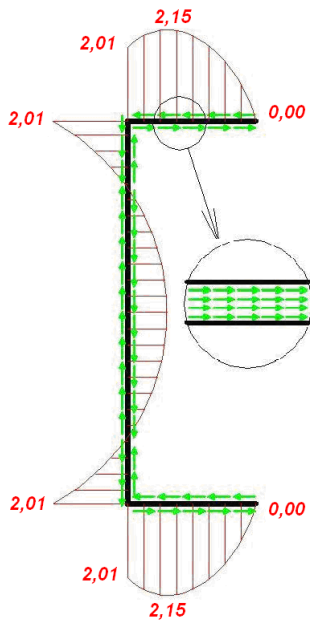


Рис. 2.15. Эюра секториальных касательных напряжений τ_{ω} (кг/см²)

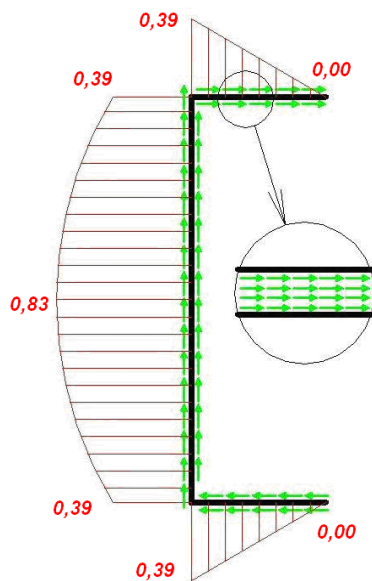


Рис. 2.16. Эюра касательных напряжений $\tau_{u_{3z}(y)}$ от поперечной силы (кг/см²)

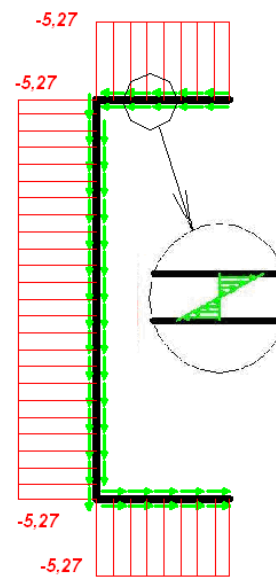


Рис. 2.17. Эюра касательных напряжений τ_{κ} от крутящего момента (кг/см²)

Распределение касательных напряжений по толщине профиля в наиболее опасной зоне представлено на рис. 2.18

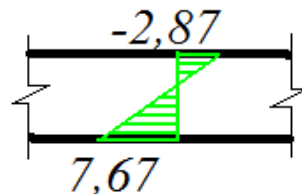


Рис. 2.18. Эюра распределение касательных напряжений по толщине профиля (кг/см²)

Как видно из рис. 2.15 - 2.17, во-первых, касательные напряжения от поперечной силы намного меньше секториальных касательных напряжений и касательных напряжений от крутящего момента. А во-вторых, суммарные касательные напряжения значительно меньше нормальных (см. рис.2.8) и сопоставимы лишь с нормальными напряжениями, возникающими от обычного изгибающего момента (по результатам расчета по формулам 2.8-2.11).

Однако как видно из рис. 2.10-2.12, в пролетах поперечная сила и все виды крутящих моментов равны нулю, и поэтому касательные напряжения возникать там не будут, чего нельзя сказать о нормальных. Таким образом,

нормальные и касательные напряжения действуют независимо друг от друга.

Поэтому в дальнейшем касательную составляющую напряжений учитывать в расчетах (при других вариантах приложения нагрузки) не будем.

2.2.3. Балка, нагруженная одной сосредоточенной нагрузкой

Максимальный изгибающий момент окажется в середине пролета и составит:

$$M_x = \frac{Pl}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4} = 0,75 \text{ кг м} = 75 \text{ кг см} \quad (2.32)$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис 2.19

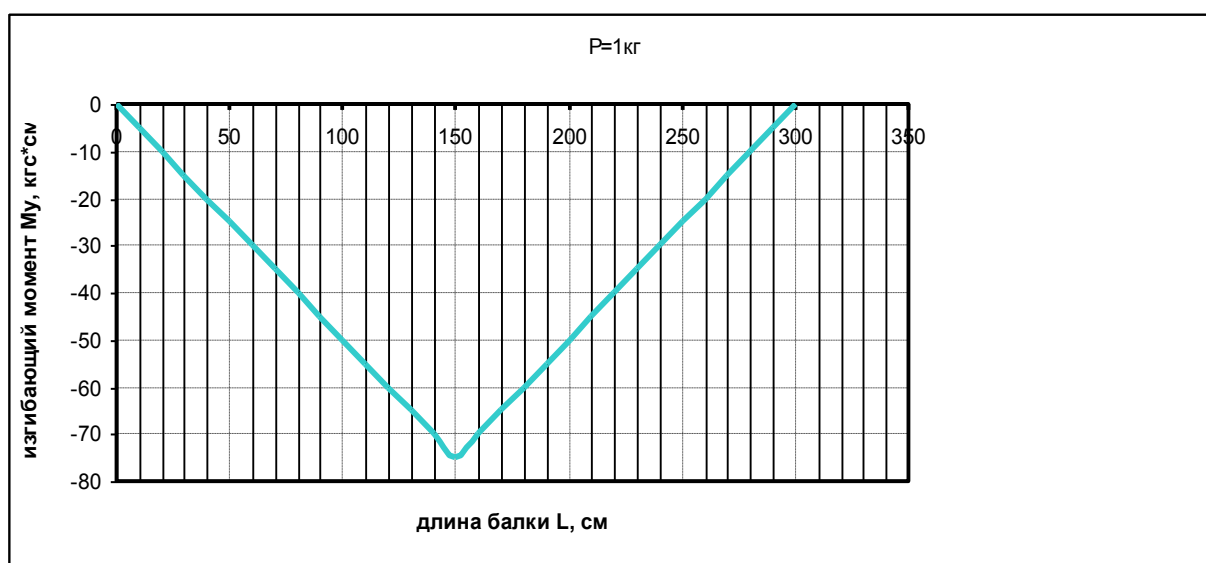


Рис. 2.19. Эпюра изгибающих моментов

$$B_\omega = \frac{Pe}{k} \frac{sh(kx) \cdot sh \frac{kl}{2}}{sh(kl)}, \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (2.33)$$

$$B_\omega = \frac{Pe}{k} \frac{sh(k(l-x)) \cdot sh \frac{kl}{2}}{sh(kl)}, \text{ при } \frac{l}{2} < x \leq l \quad (2,34)$$

Эпюра бимоментов представлена на рис 2.20

Максимальный бимомент составит:

$$B_\omega = \frac{Pe}{k} \frac{sh^2 \frac{kl}{2}}{sh(kl)} = \frac{1 \cdot 3,35}{0,005764} \cdot \frac{0,976^2}{2,729} = 202,87 \text{ кг см}^2 \quad (2.35)$$

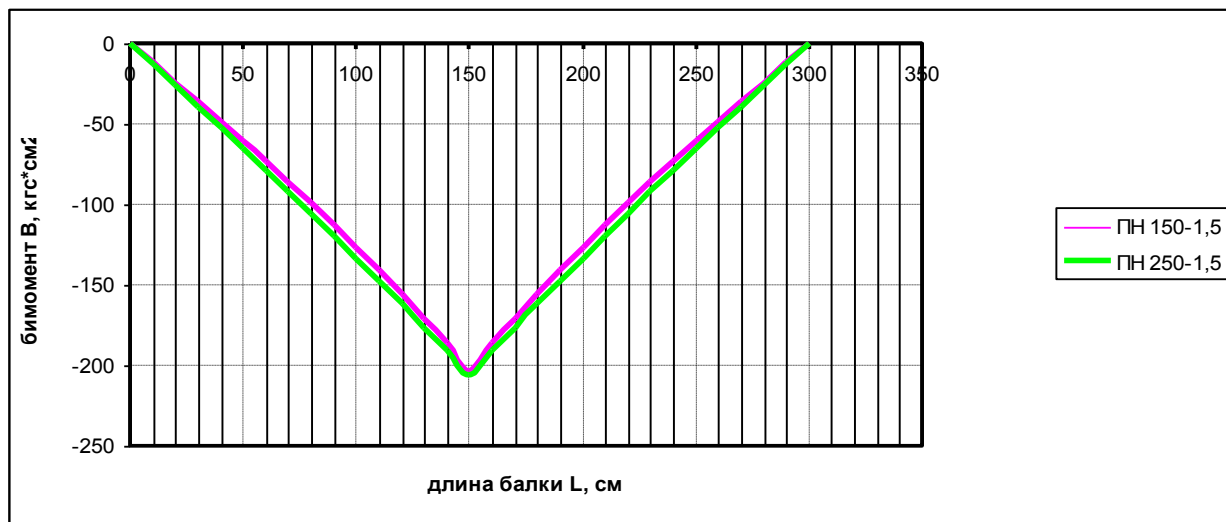


Рис. 2.20. Эпюра бимоментов

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ возникающие наиболее напряженном поперечном сечении, находящемся в середине пролета, окажутся различными в четырех характерных точках (1, 2, 3 и 4 соответственно) поперечного сечения и составят:

$$\sigma_1 = \sigma_{x1} + \sigma_{\omega1} = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_1 \quad (2.36)$$

$$\sigma_1 = -\frac{75}{15,83} + \frac{202,87}{316,32} \cdot 24,9 = -4,738 + 16,00 = +11,23 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_{x2} + \sigma_{\omega2} = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (2.37)$$

$$\sigma_2 = -\frac{75}{15,83} - \frac{202,87}{316,32} \cdot 12,6 = -4,738 - 8,081 = -12,82 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_{x3} + \sigma_{\omega3} = +\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (2.38)$$

$$\sigma_3 = +4,738 + 8,081 = +12,82 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_4 = \sigma_{x4} + \sigma_{\omega4} = +\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_1 \quad (2.39)$$

$$\sigma_4 = +\frac{75}{15,83} - \frac{202,87}{316,32} \cdot 24,9 = +4,738 - 16,00 = -11,23 \text{ кг/см}^2$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис 2.21.

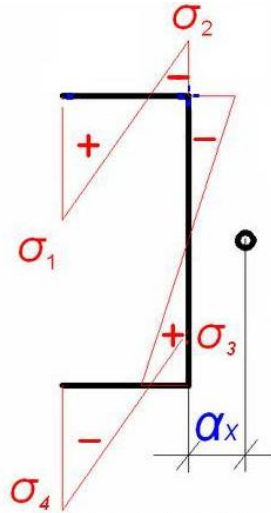


Рис. 2.21. Эпюра нормальных напряжений

2.2.4. Балка, нагруженная двумя сосредоточенными нагрузками

Максимальный изгибающий момент окажется в середине пролета и составит:

$$M_x = \frac{Pl}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1 \text{ кг м} = 100 \text{ кг см} \quad (2.40)$$

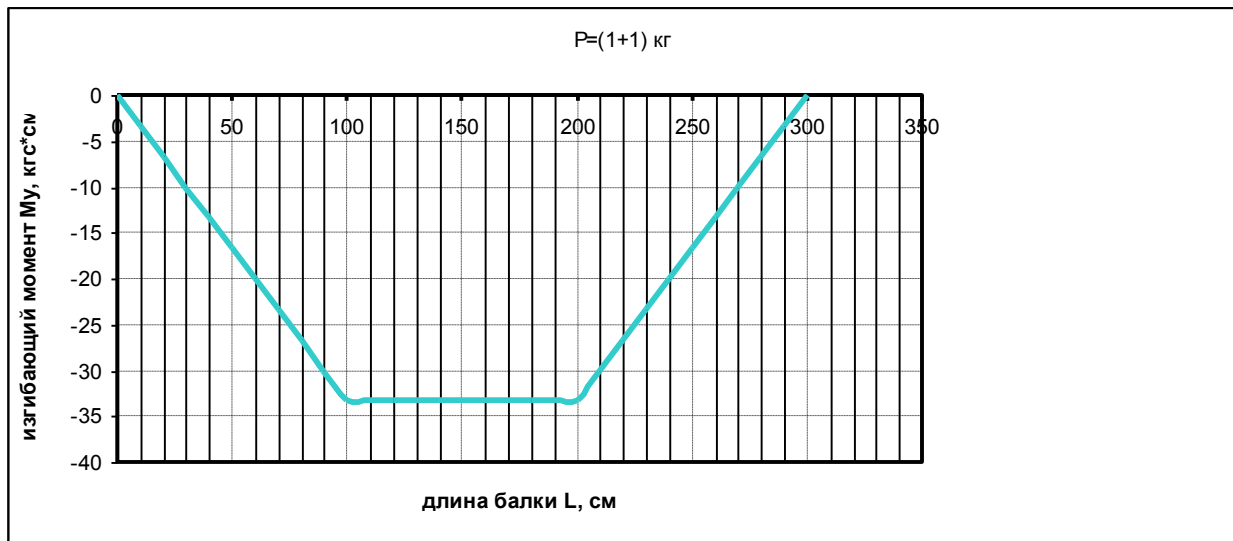


Рис. 2.22. Эпюра изгибающих моментов

Распределение бимоента по длине балки описывается следующими зависимостями:

$$B_\omega = \frac{Pe}{k} \frac{sh(kx)}{sh(kl)} \left(sh \frac{2kl}{3} + sh \frac{kl}{3} \right), \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{l}{3} \quad (2.41)$$

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh \frac{kl}{3}}{sh(kl)} (sh(k(l-x)) + sh(kx)) , \text{ при } \frac{l}{3} < x \leq \frac{2l}{3} \quad (2.42)$$

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh(k(l-x))}{sh(kl)} (sh \frac{2kl}{3} + sh \frac{kl}{3}) , \text{ при } \frac{2l}{3} < x \leq l \quad (2.43)$$

Эпюра изгибающих бимоментов представлена на рис. 2.23

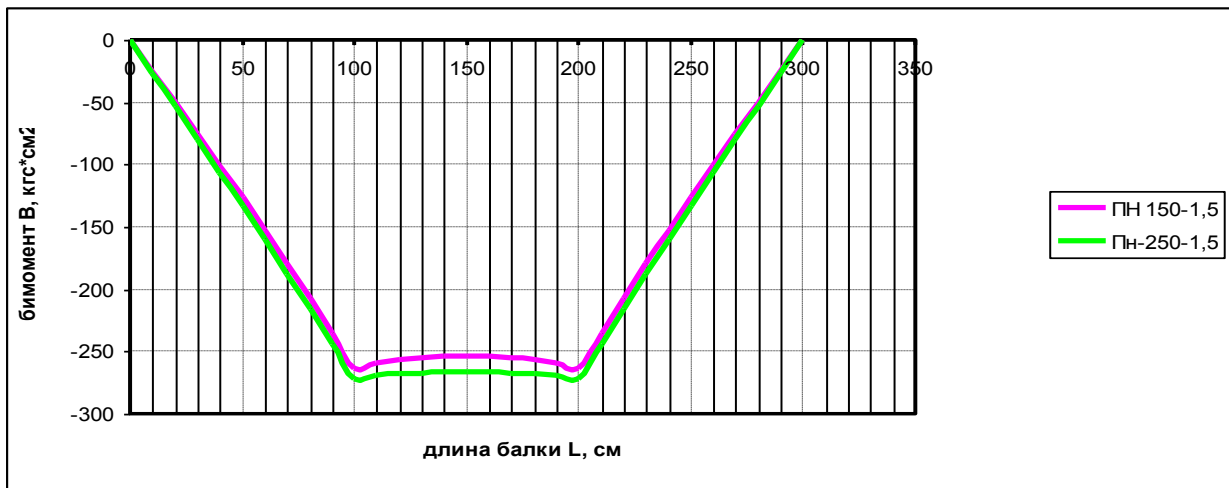


Рис. 2.23. Эпюра бимоментов

Максимальный бимомент составит:

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh^2 \frac{kl}{2}}{sh(kl)} (sh \frac{kl}{3} + sh \frac{2kl}{3}) = 263,77 \text{ кг см}^2 \quad (2.44)$$

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ возникающие наиболее напряженном поперечном сечении, находящемся в середине пролета, окажутся различными в четырех характерных точках (1,2,3 и 4 соответственно) поперечного сечения и составят:

$$\sigma_1 = \sigma_{x1} + \sigma_{\omega1} = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_1 \quad (2.45)$$

$$\sigma_1 = -\frac{100}{15,83} + \frac{263,77}{316,32} \cdot 24,9 = -6,317 + 20,76 = +14,45 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_{x2} + \sigma_{\omega2} = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (2.46)$$

$$\sigma_2 = -\frac{100}{15,83} - \frac{263,77}{316,32} \cdot 12,6 = -6,317 - 8,081 = -16,82 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_{x3} + \sigma_{\omega3} = +\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega_2 \quad (2.47)$$

$$\sigma_3 = +\frac{100}{15,83} + \frac{263,77}{316,32} \cdot 12,6 = +6,317 + 8,081 = +16,82 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_4 = \sigma_{x4} + \sigma_{\omega4} = +\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega_1 \quad (2.48)$$

$$\sigma_4 = +\frac{100}{15,83} - \frac{263,77}{316,32} \cdot 24,9 = +6,317 - 20,76 = -14,45 \text{ кг/см}^2$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис.2.24.

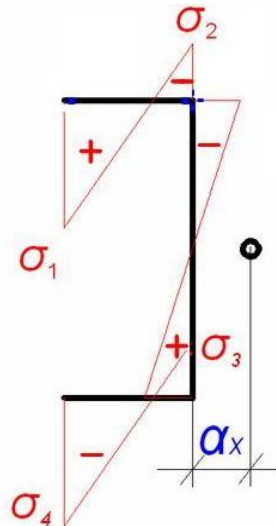


Рис. 2.24. Эпюра нормальных напряжений

2.2.5. Анализ общей устойчивости балки по С.П. Тимошенко при различных нагрузках

Расчетные формулы:

$$m^2 = \frac{GJ_t l^2}{EJ_\omega} = k^2 l^2 = 0,005764^2 \cdot 300^2 = 2,99 \quad (1,27) \quad (2.49)$$

При $m^2=2,99$ (1,27) $k_1=33,5$ (59,1), $k_2=64,0$ (98,0)

$$P_{кр} = \frac{k_1 \sqrt{EI_y GI_t}}{l^2} = \frac{33,5 \cdot \sqrt{118,75 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0273 \cdot 0,81 \cdot 10^6}}{300^2} = 873,6 \quad (3424) \text{ кгс} \quad (2.50)$$

$$q_{кр} = \frac{k_2 \sqrt{EI_y GI_t}}{l^3} = \frac{64,0 \cdot \sqrt{118,75 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0273 \cdot 0,81 \cdot 10^6}}{300^3} = 556,6 \quad (1892) \text{ кгс/м} \quad (2.51)$$

2.2.6. Анализ местной устойчивости балки при различных нагрузках

Редукционные характеристики поперечного сечения определим по смешанному методу определения эффективной ширины и эффективной толщины для отдельно стоящих элементов, приведенному в Приложении D (справочном) Еврокода 3 [3].

Согласно этому методу, эффективная площадь элемента состоит из участка с эффективной шириной (b_{e0}) и участка с эффективной толщиной t_{eff} на остальной ширине элемента с полной шириной b_p .

В качестве примера расчета таблицы приведем расчет первой строки, соответствующей загрузке погонной нагрузкой профиля ПН 150-1,5.

Напряжения в начале и конце верхней полки σ_1 и σ_2 соответственно определены в разделе 2.2.2. (формулы 2.8-2.9) и составляют 13,69 и -16,99 кг/см²

Коэффициент соотношения напряжений, согласно [8], может определяться на основе распределения напряжений в полном поперечном сечении, «...допуская распределение напряжений по сечению в пределах упругости», что означает, что для определения напряжений может использоваться методика Власова, и равен:

$$\psi = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{15,49}{-18,54} = -0,835 \text{ кг/см}^2 \quad (2.52)$$

Теоретическая ширина полки определяется по разделу 5.1.4. [6].

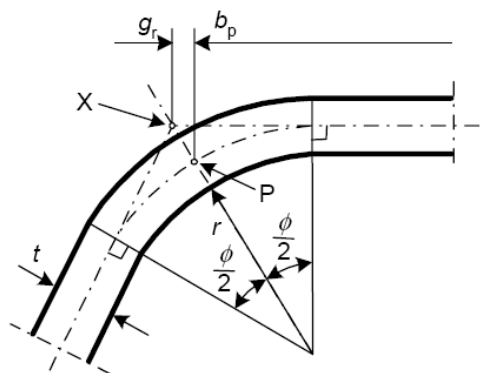


Рис. 2.25. средняя точка угла или сгиба:
 x – пересечение средних линий;
 p – средняя точка угла

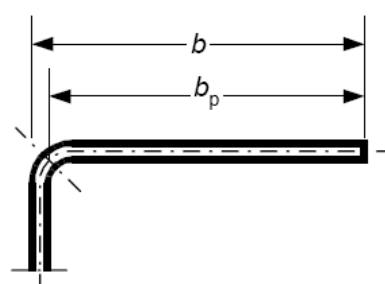


Рис. 2.26. Теоретическая ширина b_p для плоских частей полки

Таблица 2.3.

Расчет критических нагрузок по местной устойчивости с учетом редуцированных характеристик

Загружение	пояс	σ_1 ,	σ_2 ,	ψ	b_p ,	b_{e0} ,	b_t ,	t_{eff} ,	k_σ	W_{eff} ,	W ,	M ,	F
		σ_4 ,	σ_3										
(1)	(2)	кг/см ²	кг/см ²	(5)	см	см	см	см	(10)	см ³	см ³	кг*см	(14)
ПН 150-1,5													
q=1кгс/м	верхний	15,49	-18,54	- 0,835	4,7	1,08	2,14	0,075	17,8	8,702	15,833		
	нижний	-15,49	18,54	- 0,835	4,7	3,22	2,14	0,075	0,785				
P=1кгс	верхний	11,23	-12,82	-0,875	4,7		2,19	0,075		8,758	15,833		
	нижний	-11,23	12,82	-0,875	4,7		2,19	0,075					
P=(1+1)кгс	верхний	14,45	-16,82	-0,859	4,7		2,17	0,075		8,792	15,833		
	нижний	-14,45	16,82	-0,859	4,7		2,17	0,075					

Из рис. 2.25 очевидно, что

$$b_p = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = b - r \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right) - t = 5 - 0,5 \cdot (1 - 0,707) - 0,15 = 4,7 \text{ кг/см}^2 \quad (2.53)$$

В нашем случае ширина полки $b=0,5$ см; толщина полки $t=1,5$ мм; $\phi=90^\circ$.

Полученное значение теоретической ширины будет справедливо для всех расчетных случаев.

При $\psi < 0$ и соотношении напряжений, соответствующему четвертому случаю эффективные геометрические размеры верхней полки окажутся равными

$$b_t = \frac{\psi b_p}{(\psi - 1)} = \frac{-0,835 \cdot 4,7}{-0,835 - 1} = 2,14 \text{ см} \quad (2.54)$$

$$b_{e0} = \frac{0,42 b_p}{(1 - \psi)} = \frac{0,42 \cdot 4,7}{1 - (-0,835)} = 1,08 \text{ см} \quad (2.55)$$

$$t_{eff} = (1,75\rho - 0,75)t \approx 0,5t = 0,5 \cdot 0,15 = 0,075 \text{ см} \quad (2.56)$$

Новые размеры нижней полки при соотношении напряжений, соответствующем второму случаю, равны:

$$b_t = \frac{\psi b_p}{(\psi - 1)} = \frac{-0,835 \cdot 4,7}{-0,835 - 1} = 2,14 \text{ см} \quad (2.57)$$

$$b_{e0} = \frac{0,42 b_p}{(1 - \psi)} + b_t = \frac{0,42 \cdot 4,7}{1 - (-0,835)} + 2,14 = 3,22 \text{ см} \quad (2.58)$$

$$t_{eff} = (1,75\rho - 0,75)t \approx 0,5t = 0,5 \cdot 0,15 = 0,075 \text{ см} \quad (2.59)$$

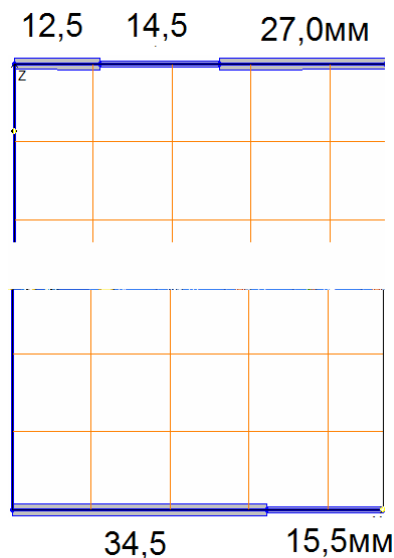


Рис. 2.27. Редуцированное сечение ПН 150-1,5

Произведя расчет геометрических характеристик в программе TONUS, получим редуцированный момент сопротивления (графа 11), равный $W_{\text{eff}}=8,702\text{см}^3$

Для сравнения нередуцированный момент сопротивления (графа 12) $W=15,833\text{ см}^3$.

Для верхней полки при $0 \geq \psi \geq -1$

$$k_{\sigma} = 1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2 = 1,7 - 5 \cdot (0,835) + 17,1(-0,835)^2 = 17,8 \quad (2.60)$$

Для нижней полки при $1 \geq \psi \geq -2$

$$k_{\sigma} = \frac{1,7}{3+\psi} = \frac{1,7}{3-0,835} = 0,785 \quad (2.61)$$

Аналогичным образом определены все остальные строки табл. 2.3.

2.3. РАСЧЕТ МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

2.3.1. Выбор метода исследования и способа задания модели

В современном строительном проектировании используется 2 основных типа численных методов:

- метод конечных элементов (МКЭ);
- метод граничных элементов (МГЭ).

Оба эти метода являются алгоритмизированными и автоматизированными.

В качестве выбранного метода для решения конкретных задач пособия является МКЭ, как наиболее доступный и широко распространенный. В работе применен метод, реализованный в расчетно-вычислительном комплексе SCAD Office.

Ниже на рисунках 2.28-2.30 приведены примеры конечноэлементной модели при различных загрузках: распределено, сосредоточенном в одном и двух местах соответственно.

2.3.2. Анализ результатов, полученных численным методом

Метод Б.С. Швармана является основным методом оценки точности численных методов и по своей сути является экстраполяционным. Основные положения метода Б.С. Шварцмана приведены в п. 1.5.5

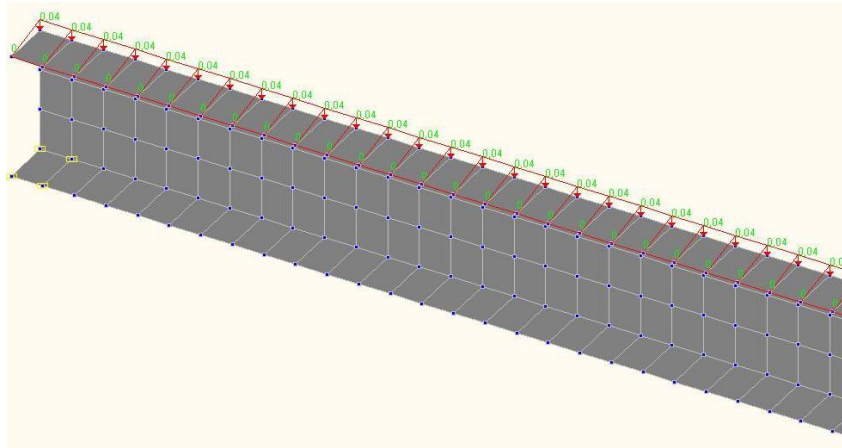


Рис. 2.28. Расчетная пластинчатая модель для МКЭ (случай равномерно распределенной нагрузки)

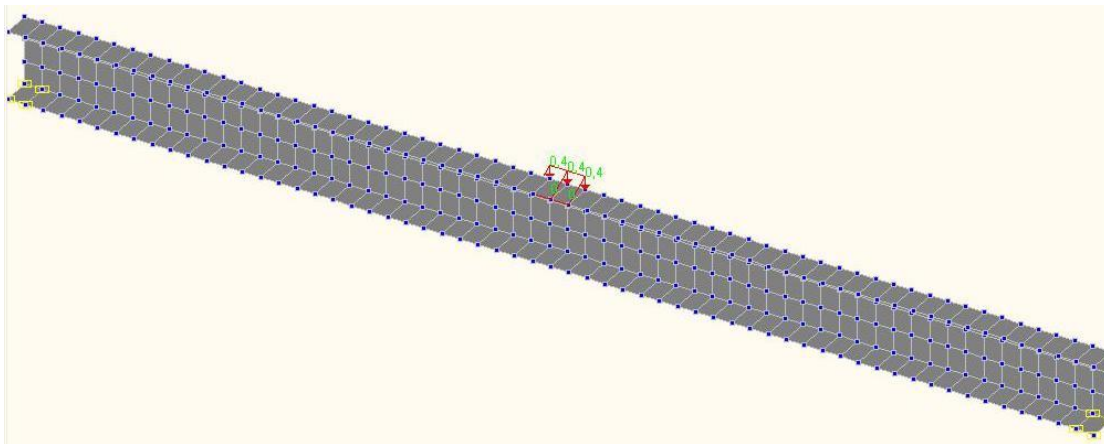


Рис. 2.29. Расчетная пластинчатая модель для МКЭ (случай сосредоточенной в одном месте нагрузки)

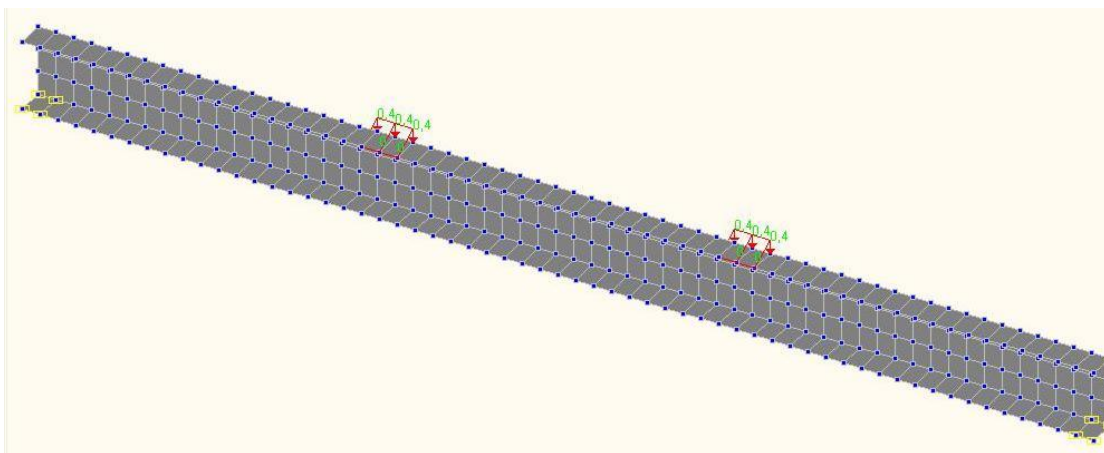


Рис. 2.30. Расчетная пластинчатая модель для МКЭ (случай сосредоточенной в двух местах нагрузки)

Таблица 2.4

Расчет критических нагрузок по местной устойчивости с учетом редуцированных характеристик

Результаты по нормальным напряжениям σ_x										
	КЭ, мм	Мм	σ_x	Dn	Rn	An	Zшв	e	погрешность	погр. ист- тин
1	50	50	-31,814							89,42
2	25	25	-16,52	-58,823	-17,04	-16,7757	-16,9078	-0,13217	0,782	-1,64
3	12,5	12,5	-16,78	9,62963	-16,834	-16,8101	-16,8221	-0,01194	0,071	-0,09
4	6,25	6,25	-16,807	-3,375	-16,791	-16,8008	-16,7959	0,004914	-0,029	0,07
5	3,125	3,125	-16,799							0,02
Истинное значение			-16,80							
Результаты по нормальным напряжениям σ_y										
	КЭ, мм	Мм	σ_y	Dn	Rn	An	Zшв	e	процент	
1.	50	50	24,047							76,20
2.	25	25	13,423	-39,203	13,965	13,68726	13,82613	0,13887	1,00440545	-1,64
3.	12,5	12,5	13,694	-8,4688	13,63	13,66538	13,64769	-0,01769	-0,12961732	0,34
4.	6,25	6,25	13,662	0,59259	13,554	13,74055	13,64727	-0,09327	-0,68345324	0,11
5.	3,125	3,125	13,608							-0,29
Истинное значение			13,65							

Продолжение табл.2.4

Результаты по вертикальному перемещению W_z										
	КЭ, мм	Мм	W_z	D_n	R_n	A_n	$Z_{шв}$	e	процент	
1.	50	50	-0,07744							49,27
2.	25	25	-0,05935	3,36245	-0,04859	-0,05169	-0,05014	0,001551	-3,09395970	14,40
3.	12,5	12,5	-0,05397	3,8156	-0,05115	-0,05206	-0,0516	0,000455	-0,88094761	4,03
4.	6,25	6,25	-0,05256	3,525	-0,05176	-0,052	-0,05188	0,000121	-0,23282621	1,31
5.	3,125	3,125	-0,05216							0,54
Истинное значение			-0,05							
Погрешность			33,01							

Исходные данные:

профиль ПН-150-50-1,5: сталь строительная, С255

тип элемента пластины: №44

нагрузка: полезная $q=1$ кг/м

Расчетные формулы:

$$|U(x_i) - U(x_i)| = Ch^k \quad (2.62)$$

Вспомогательный параметр D_n определится зависимостью:

$$D_n = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+2} - z_{n+1}} \quad (2.63)$$

При этом считается, что:

$$D_n \rightarrow 2^k \quad (2.64)$$

где k – целое число, характеризующее численный метод исследования и в каждом конкретном случае являющееся «константой метода»

Значение по Ричардсону:

$$R_n = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{2^k - 1} \quad (2.65)$$

Значение по Эйткену:

$$A_n = z_{n+2} + \frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{D_n - 1} \quad (2.66)$$

В [8] доказано, что

$$A_n \leq Z_n \leq R_n \quad (2.67)$$

В таком случае значение по Шварцману (точное значение) составит:

$$Z_n = \frac{A_n + R_n}{2} \quad (2.68)$$

А абсолютная погрешность:

$$\Delta Z_n = \frac{|A_n - R_n|}{2} \quad (2.69)$$

2.4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ РЕЗУЛЬТАТОВ

В табл. 2.5. представлены значения нормальных напряжений, полученных тремя методами, взятые в четырех точках поперечного сечения (рис. 2.31)



Рис. 2.31. Схема поперечного сечения тонкостенного профиля

Таблица 2.5

Сопоставление напряжений от единичных нагрузок, полученных различными теоретическими методами

№	Вид нагрузки	Номер точки	σ_x , кгс/см ²		
			Аналитический метод		Численный метод (МКЭ)
			классическая теория	Теория Власова	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Профиль типа ПН-150-1,5					
1.	q=1кг/м	1	-7,12	15,49	13,69
		2	-7,12	-18,54	-16,99
		3	+7,12	18,54	+13,67
		4	+7,12	-15,49	-13,67
2.	P=1кг	1	-4,74	11,62	9,85
		2	-4,74	-13,02	-11,64
		3	+4,74	13,02	11,49
		4	+4,74	-11,62	-9,59
3.	P=(1кг+1кг)	1	-6,317	14,45	12,73
		2	-6,317	-16,82	-15,41
		3	+6,317	16,82	12,58
		4	+6,317	-14,45	-15,38

Значения критических нагрузок, соответствующих напряжениям от единичных нагрузок (табл. 2.5.), потери устойчивости (общей и местной) и результаты эксперимента, представлены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Сопоставление критических нагрузок, полученных различными методами расчета прочности и устойчивости

№ п/п	Вид нагрузки	Критическое значение нагрузки $F_{пн}$, кгс								
		аналитические методы			численные методы		Местная устойчивость по Еврокоду-3	эксперимент		
		По «классической» теории	Общая устойчивость по С.П. Тимошенко	По Власову	Без учета потери устойчивости	С учетом потери устойчивости		1	2	3
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Профиль типа ПН-150-1,5										
1.	$q=1\text{кг/м}$	393,2	556,6	151,0	164,8	25,07	98,8	65,4	63,2	64,0
2.	$P=1\text{кг}$	590,7	873,6	215,1	240,5	63,39	126,7	135,0	103,0	160,5
3.	$P=(1\text{кг}+1\text{кг})$	443,2	-	166,5	181,7	33,98	103,4	105,2	102,4	112,8

При этом значение $F_{пн}$ численно равно:

- для столбцов 3, 5, 6: коэффициенту пропорциональности между напряжением от единичной нагрузки и допусковым напряжением, соответствующим пределу текучести стали марки С-350 ($R_y=3500 \text{ кгс/см}^2$) с коэффициентом условия работы γ_c , равным 0,8;
- для столбцов 4, 8: критической силе потери устойчивости;
- для столбца 7: коэффициенту запаса устойчивости;
- для столбцов 9, 10, 11: фактической разрушающей нагрузке образца.

Итак, качественно все полученные результаты условно можно разделить на 3 диапазона.

В табл. 2.6. в графах 3, 4 содержатся значения, соответствующие наибольшей нагрузке, которую, согласно «классической» теории расчета может воспринимать тонкостенная свободно опертая балка. Напряженно-деформированное состояние балки, согласно этим результатам, является наименее опасным. Однако, как видно из табл. 2.6, данные результаты не учитывают депланацию поперечного сечения и неравномерность распределения напряжений по ширине полок, и поэтому заведомо являются неверными.

Как видно из результатов расчета по формулам 2.49-2.51, критическая нагрузка, связанная с потерей общей устойчивости столь велика, что превышает даже нагрузку, соответствующую «классической» теории прочности. Даже если балку какими-то конструктивными мерами защитить от потери местной устойчивости и даже депланации, т.е. каким-то образом заставить ее изгибаться по законам, справедливым для нетонкостенных и закрытых профилей, все равно потеря прочности в виде достижения площадки текучести произойдет раньше потери общей устойчивости. Иными словами, балка «потечет» намного раньше, чем выйдет из плоскости нагружения, и значениям графы не стоит придавать большого значения. Особенно эти рассуждения характерны для более высокого профиля – ПН 250-1,5.

В табл. 2.6 в графах 5, 6, 7 содержатся значения «среднего» диапазона. Эти результаты учитывают влияние депланации и неравномерность распределения напряжений по ширине полок и высоте стенки и отличаются друг от друга лишь незначительно (в пределах 15%). Данное несоответствие можно объяснить нетождественностью задания граничных условий. Ведь, во-первых, в модели по теории В.З. Власова граничные условия задаются как бы «точечно»: закрепление стержней происходит по возможным 10 (по 5 справа и слева) из 14 (по 7 справа и слева) степеням свободы. А в численном методе при шаге разбиения балки на конечные элементы 12,5x12,5 (мм) закрепление происходит по 50 из 70 степеням свободы. Закрепление в данном методе является уже не «точечным», а «линейным», и может считаться эквивалентным опиранию на острое ребро. Во вторых, закрепление в первом случае происходит как бы посередине сечения балки, т.е. на ее нейтральной оси, а закрепление во втором случае относится к низу балки, т.е. к ее полке.

В табл. 2.6 в графах 8, 9, 10, 11 представлены наиболее опасные значения критических нагрузок. При численном методе они соответствуют местной потере устойчивости стенки балки. При сопоставлении результатов второго и третьего диапазона видно, что балка теряет устойчивость, не набрав и половины своей прочности. Об этом свидетельствуют результаты испытаний (Приложение 2). Расхождение теоретических и экспериментальных результатов можно объяснить также нетождественностью друг другу граничных условий, а так же тем, что в любой теории всегда присутствует тем или иным образом некий коэффициент запаса по отношению к реальным результатам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЯХ И МЕТОДАХ ИХ РАСЧЕТА

В настоящее время в строительной отрасли известно довольно много соединений ЛСТК [18,19]: при помощи сварки, склеивания, самонарезающих винтов, заклепок и болтов, а также комбинированием указанных видов (клееболтовые соединения, клеи на сварке и т.д.).

Сварные соединения в отечественной практике использования ЛСТК используются довольно редко. По мнению некоторых признанных в России специалистов, такие соединения не являются в принципе допустимыми, т.к. в большинстве случаев толщина металлических профилей не превышает 2,5-3мм, что существенно повышает риск сквозного «провара» конструкции. Также нежелательность применения сварки обуславливается наличием тонкого слоя оцинкованного покрытия на поверхности стали.

По мнению же зарубежных исследователей (Брудка Я., Лубиньски М. и др.) возможность сваривания таких конструкций допускается, и данный факт подтверждается многочисленными опытами.

Но, так или иначе, для соединения тонкого листового металла существует соответствующая техника и технология. Нередко встречаются решения, известные только в строительстве легких машин или самолетов.

Клеевые соединения. Склеивание металлов впервые было применено в авиационной промышленности около 70 лет назад. В течение 60-70-х гг. XX в. многие научно-исследовательские институты разных стран занимались вопросами широкого применения этого метода, в частности в элементах, состоящих из деталей, изготовленных из разных материалов. В строительстве до недавнего времени склеивание для соединения конструктивных материалов применяются довольно редко

Заклепочные соединения. Заклепки — это круглые стержни диаметром от 8-25 мм и более, имеющие на одном конце сферическую головку (закладку). В ЛСТК используются, в основном, вытяжные заклепки (рис. 1.П1).



Рис. 1.П1. Вытяжные заклепки

Заклепочные соединения используют, как правило, в следующих случаях:

- в стыках стальных элементов высокой прочности $80-100 \text{ кгс/мм}^2$, так как обычно сталь этих марок трудносвариваемая или несвариваемая вообще;
- в заводских стыках, выполненных в основном с помощью точечной сварки давлением в тех их частях, где число листов металла превышает 3 или если их суммарная толщина больше 15 мм;
- в монтажных стыках, если необходимо устанавливать большое количество болтов. Но даже в этом случае для уменьшения размеров соединительных деталей выгодно применять болты из высокопрочной стали (без сжатия стыка), а не заклепки. В других решениях заклепочные соединения применять не рекомендуется.

Далее рассмотрим два самые распространенные типа соединения стальных тонкостенных конструкций: винтовые и болтовые соединения

Винтовые соединения.

Винтами осуществляется крепление профилей каркаса ЛСТК между собой, соединение узлов стропильных ферм, крепление к каркасу стеновых панелей, кровельных покрытий (рис. 2.П1).

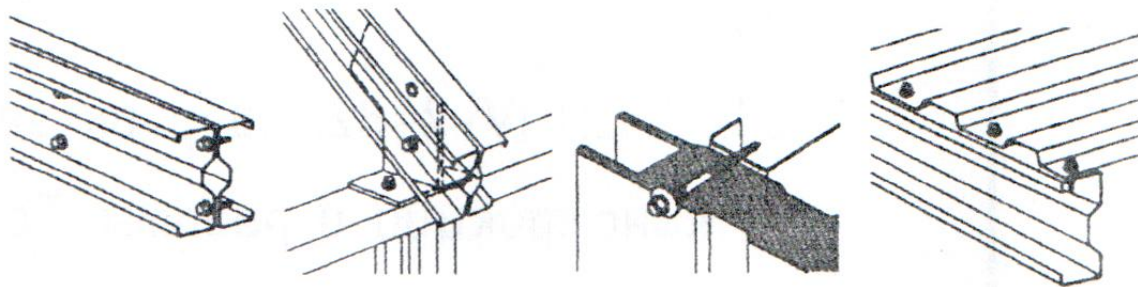


Рис. 2.П1. Соединения на винтах в ЛСТК

Винты обеспечивают в большинстве случаев неразборное соединение. Самонарезающие винты устанавливаются в заранее сделанные отверстия.

Самосверлящие самонарезающие винты (рис. 3.П1) устанавливаются без предварительного выполнения отверстий, что обеспечивает высокую производительность монтажа. Также благодаря конструктивной особенности возможно осуществлять соединение элементов, имея лишь односторонний доступ к ним.

Разнообразие винтов, применяемых в соединениях легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) велико, и потому требует подробного рассмотрения их конструктивных особенностей и областей применения.

По конструктивному исполнению винты различают их основных частей: головки, пресс-шайбы, стержня с резьбой, наконечника или сверла.

Головка винта - часть крепежного изделия, имеющего стержень служащая для передачи крутящего момента и образования опорной поверхности.

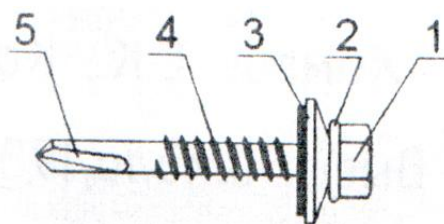


Рис. 3.П1. Самосверлящий самонарезающий винт

(1 - головка, 2 - пресс-шайба, 3 - шайба EPDM, 4 - стержень с резьбой, 5 – сверло)

Винты, применяемые в ЛСТК, имеют головку со шлицем - углублением специальной формы в торце головки или специальную потайную головку для скрытого монтажа.

Самосверлящий самонарезающий винт для соединения тонколистовой стали со стальными элементами конструкции толщиной до 14 мм, как правило, имеет головку с внешним шестигранным или комбинированным шлицем и пресс-шайбой. Наконечник винта - со сверлом типа «перо».

В случае необходимости обеспечения герметизации соединения от атмосферных осадков может комплектоваться EPDM-шайбой.

Продавливающий самонарезающий винт для соединения тонколистовой стали с тонколистовыми стальными элементами конструкции толщиной до 1 мм может иметь головку с различными типами шлицев с пресс-шайбой и без. Наконечник винта может не иметь сверла, а обладать специальной формой для обеспечения продавливания тонкого базового материала для образования «юбки» металла, позволяющей обеспечить закрепление нескольких нитей резьбы, что увеличивает величину усилия на выдергивание винта. Производится по внутренним стандартам организаций.

Основные диаметры винтов (d), применяемые в ЛСТК: 4,2; 4,8; 4,9; 5,5; 6,3; 6,5; 7,2; 8; 8,6; 10,6.

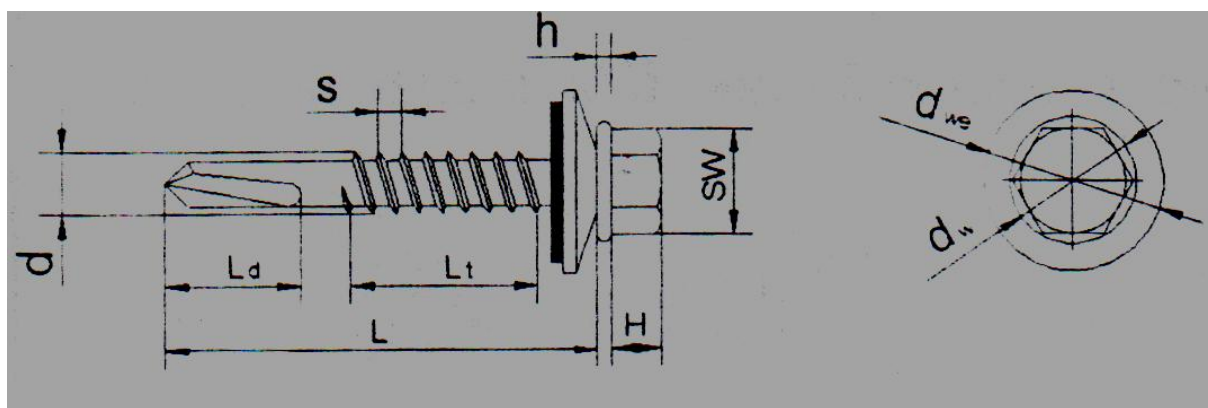


Рис 4.П1. Геометрические характеристики винта: d - диаметр винта; L - длина винта; L_d - длина сверла; L_t - длина резьбы; s - шаг резьбы; h - высота пресс-шайбы; H - высота головки; d_{sw} - диаметр пресс-шайбы; d_{we} - диаметр EPDM-шайбы; Sw - размер ключа, насадки

Длина винта (L), а также другие геометрические характеристики могут значительно различаться в зависимости от назначения.

Что касается материала, то в соединениях ЛСТК применяются винты из углеродистой и аустенитной коррозионно-стойкой стали. Винты из углеродистой стали, как правило, имеют марки С 1008, С 1042, а также SAE 1022, AISI 1018, AISI 1035.

В винтах из аустенитной коррозионно-стойкой стали применяется сталь марок AISI 304 (A2) (03X18H9, 07X16H6, X15H5Д2Т по ГОСТ 5632 [12]) и AISI 316 (A4) (03X17H14M3 по ГОСТ 5632). Существуют также биметаллические винты, стержень которых изготовлен из аустенитной коррозионно-стойкой стали, а наконечник - из углеродистой стали

Немного о конструктивных требованиях к установке винтов. Самоверляющие самонарезающие винты устанавливаются без предварительного выполнения отверстий. При установке существенными являются требования по допустимому числу оборотов, крутящему моменту и необходимому и достаточному усилию нажатия. Данные требования также установлены производителем.

Как правило число оборотов 1300-2000 об/мин. , крутящий момент - до 6 Нм и усилие нажатия - порядка 40-50 кг.

Самонарезающие винты устанавливаются в заранее выполненные отверстия. Отверстия выполняются сверлением или продавливанием. Необходимый диаметр отверстий зависит от толщины соединяемых материалов и их прочностных характеристик. Для определения нужных диаметров отверстий следует руководствоваться рекомендациями производителя. Также необходимо руководствоваться требованиями специальных рекомендаций.

Евроноормы, а именно Eurocode 3, Part 1-3 , предусматривают расчет винтовых соединений на вырыв и отрыв материала через шайбу.

Согласно нормам, несущая способность винтового соединения ЛСТК, при работе на вырыв, рассчитывается по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \text{Если } t_{\text{sup}} / s < 1 : F_{o,Rd} &= 0,45 * d * t_{\text{sup}} * f_{u,\text{sup}} / \gamma_{M2} ; \\ \text{Если } t_{\text{sup}} / s \geq 1 : F_{o,Rd} &= 0,65 * d * t_{\text{sup}} * f_{u,\text{sup}} / \gamma_{M2} ; \end{aligned} \quad (\text{П1.1})$$

где: d - диаметр винта; t_{sup} - толщина базового материала; s - шаг резьбы винта; $f_{u,\text{sup}}$ - предел прочности базового материала.

$f_{u,\text{sup}} = 335$ МПа, Согласно таблице 3.1b EN для стали С255.

Для соединений, коэффициент надежности по материалу $\gamma_{M2} = 1,25$;

При работе на отрыв через шайбу несущая способность рассчитыва-

ется как:

$$F_{p,Rd} = d_w * t * f_u / \gamma_{M2}; \quad (\text{П1.2})$$

Где, d_w - диаметр шайбы винта; t - толщина отрываемого через шайбу материала; f_u - предел прочности отрываемого через шайбу материала.

$f_{u,sup} = 335$ МПа, Согласно таблице 3.1b EN для стали С255.

Для соединений, коэффициент надежности по материалу $\gamma_{M2} = 1.25$;

Болтовые соединения

Болтовые соединения имеют перспективы применения в легких стальных конструкциях для монтажа стыков, выполняемых на строительной площадке. Основное преимущество их применения в ЛСТК перед другими соединениями заключается в возможности расширения области применения легких стальных тонкостенных конструкций в большепролетных конструкциях, например, в покрытиях пролетом 18 м и более (рамы, фермы).

Рассмотрим особенности болтовых соединений.

Известно, что болтовые соединения обладают податливостью, которая оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции в целом. В связи с этим проведены экспериментально-теоретические исследования деформативности болтовых соединений, работающих на смятие, а также их расчет Н.Н. Стрелецким, В.В. Каленовым. Исследования показали, что для болтовых соединений тонкостенных профилей критерием предельного состояния являются деформации смятия элементов в соединении. На основании опытов, проведенных российскими учеными, было доказано, что увеличить несущую способность фермы покрытия из тонкостенных холодногнутых профилей можно путем внесения следующих конструктивных изменений по сравнению с существующими решениями (рис. 5.П1):

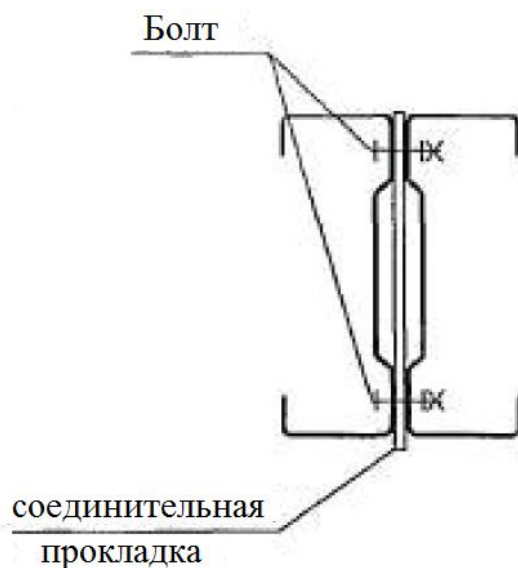


Рис. 5.П1 Конструктивное решение соединения тонкостенных холодногнутых профилей:

- использованием в местах приложения сосредоточенных усилий дополнительных соединительных элементов толщиной 4-6 мм;
- применением для соединения тонкостенных холодногнутых профилей болтов нормальной точности или высокопрочных взамен самонарезающих винтов.

Испытания, проведенные в США, показали, что если расстояние между болтами велико, то разрушение стыка происходит при меньшей нагрузке, чем определяемая прочностью металла в ослабленном сечении. Поэтому американские нормы рекомендуют, чтобы напряжения в таком сечении были меньше допускаемых или установленных по формуле [П1.3]

$$k_1 = \left(0,1 + \frac{3d}{e}\right)k, \quad (\text{П1.3})$$

где: k — допускаемое напряжение для листового металла; d — диаметр стержня болта; e — расстояние между болтами.

В отечественных нормативных документах (СНиП II-23-81*) расчетное усилие, воспринимаемое одним болтом по смятию соединяемых элементов, определяется по формуле

$$N_b = R_{bp} \cdot \gamma_b \cdot dt, \quad (\text{П1.4})$$

где: R_{bp} — расчетное сопротивление смятию соединяемых элементов; γ_b — коэффициент условий работы одноболтового соединения; t — минимальная толщина соединяемых элементов.

В случае $t \leq 4$ мм с учетом рекомендаций Пособия по проектированию стальных конструкций к СНиП II-23-81* (п. 2.7) расчет соединений тонколистовых профилей можно вести в соответствии со СНиП.

По табл. 5 СНиП II-23-81* с учетом рекомендаций Пособия расчетное сопротивление смятию для тонких листов следует определять по формуле

$$R_{bp} = \frac{[0,6 + 340R_{un} / (\gamma_m E)] R_{un}}{\gamma_m}, \quad (\text{П1.5})$$

где γ_m — коэффициент надежности по материалу.

Исследования, проведенные в России, показали, что при использовании формулы (П1.5) в соединениях возможен большой запас прочности. Это связано с тем, по мнению авторов, что эксперименты, положенные в основу этого подхода, проводились на пластинах существенно большей толщины. Этот подход не учитывал конструктивных особенностей соединения, в значительной части на результат повлиял масштабный фактор.

С другой стороны, свод правил СП 53-102-2004 предлагает упрощенный по сравнению со СНиП II-23-81* подход к определению расчетного сопротивления смятию элементов — $R_{bp} = 1,35R_{un}$.

Также при определении коэффициента γ_b учитывается отношение a/d_h (a — расстояние от края элемента до центра болтового отверстия; d_h — диаметр отверстия под болт).

Результаты экспериментов вышеуказанных авторов показали хорошую сходимость. Очевидно, что и болтовые соединения ЛСТК требуют более детальной разработки нормативной базы в России.

Соединения ЛСТК на вытяжных заклепках и самосверлящих самонарезающих винтах работают на срез или на растяжение, также возможны случаи комбинированного нагружения. Работа данного нового вида крепежа в тонколистовых стальных конструкциях требует детального изучения.

Разрушение соединений ЛСТК может проходить как по крепежу, так и по скрепляемому материалу. На рис. 6.П1 и 7.П1 рассмотрены возможные типы разрушений соединений ЛСТК на вытяжных заклепках и винтах.

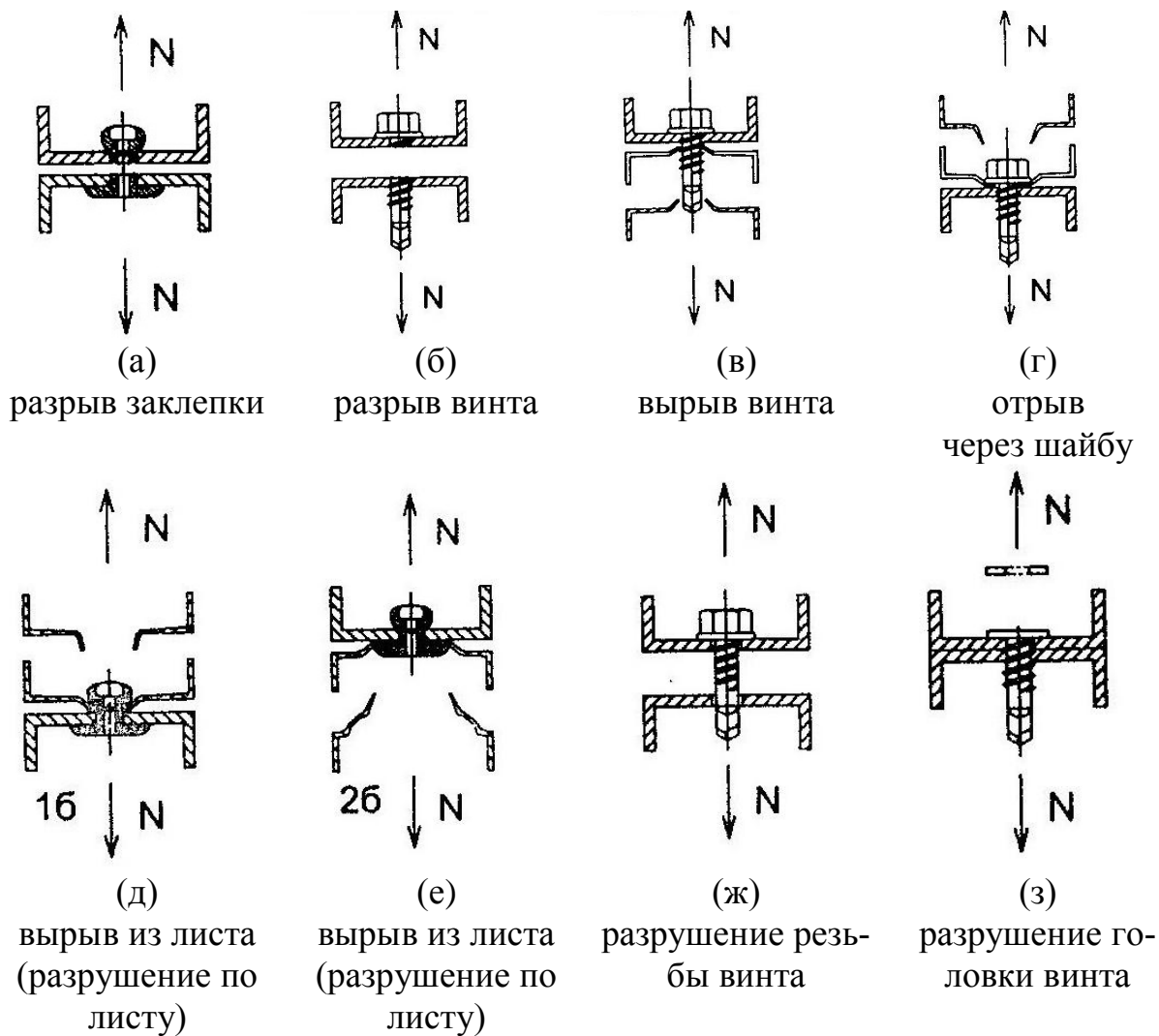


Рис. 6.П1. Соединения, работающие на растяжение

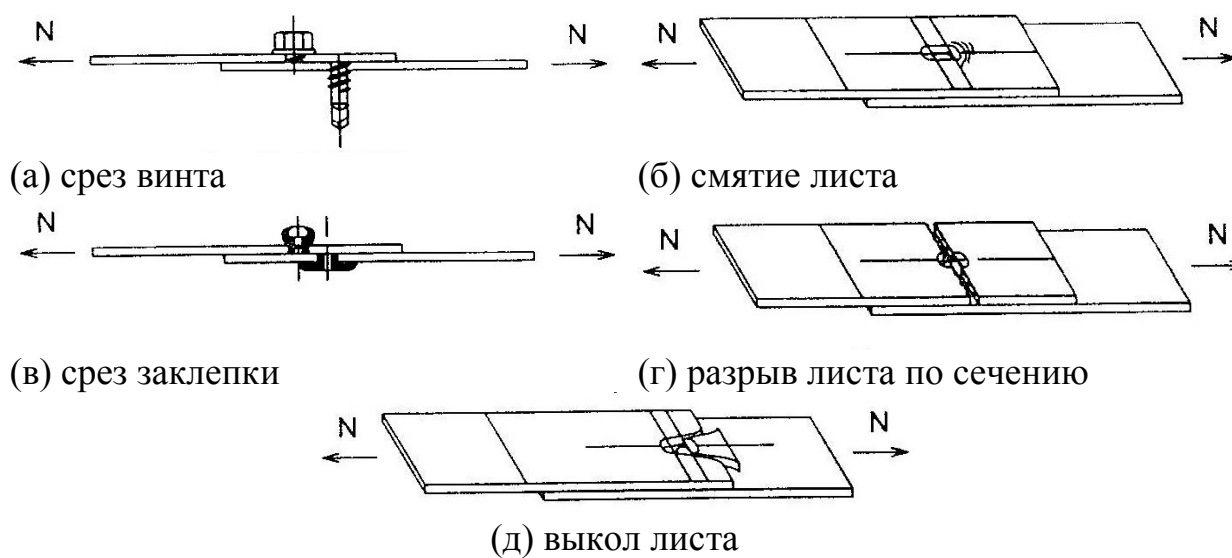


Рис.7.П1. Типы разрушения соединений, работающих на срез

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айрумян Э.Л. Рекомендации по проектированию, изготовлению и монтажу конструкций каркаса малоэтажных зданий и мансард из холодногнутых стальных оцинкованных профилей производства ООО конструкций «БалтПрофиль»/ Э.Л. Айрумян. - М. ЦНИПСК им. Мельникова, 2004. — 69 с.
2. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни : (Прочность, устойчивость, колебания) / В.З. Власов .— Москва ; Ленинград : Государственное издательство строительной литературы, 1940.— 276 с.
3. EN 1993-1-3:2004. Еврокод 3: Проектирование стальных конструкций. Часть 1-3: Общие правила. Дополнительные правила для холодногнутых элементов и листов. Английская версия, 2004. — 132 с.
4. Икрин В.А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности/ В.А. Икрин – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 424 с.
5. Карпиловский В.С. SCAD OFFICE. Формирование сечений и расчет их геометрических характеристик./ В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер – М.: Изд-во АСВ, 2006. – 80 с.
6. Карпиловский В.С. Вычислительный комплекс SCAD/ В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 592 с.
7. Кузьмин Н.А. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек./ Н.А. Кузьмин, П.А. Лукаш, И.Е. Милейковский. - Госстройиздат, 1960. – 264 с.
8. Лалин В.В. Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов: Учеб. пособие / В.В. Лалин, Г.С. Колосова ; СПбГТУ .— Санкт-Петербург : Изд-во СПбГТУ, 2001. –72 с.
9. Перельмутер А.В., Расчетные модели сооружений и возможность их анализа/ А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер, - Киев, Изд-во «Сталь», 2002. – 600с.
10. Ватин Н. И., Термопрофиль в легких стальных строительных конструкциях [Электронный ресурс] : статья / Н. И. Ватин, Е.Н. Попова ; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

.— Электрон. текстовые дан. (1 файл : 1,87 Мб) .— СПб, 2006 .— Загл. с титул. экрана .— Свободный доступ из сети Интернет .— Adobe Acrobat Reader 6.0 .— <URL:ftp://ftp.unilib.neva.ru/dl/1307.pdf>.

11. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. / В.И. Сливкер— М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.

12. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов: С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений: пер. с англ./ Под ред. А.Н. Митинского. Изд. 2-е, стереотипное.— М.: КомКнига, 2006. – 536 с.

13. *Туснин А.Р.* Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.т.н.: Спец. 05.23.01 /А.Р. Туснин - М., 2004. – 37 с.

14. *Ватин Н.И.* Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы. Журнал для профессионалов «СтройПРОФИль», № 3(57)/ Н.И. Ватин, В.А. Рыбаков - Изд-во «Торговля и промышленность», 2007. С. 32-35

15. *Рыбаков В.А.* Влияние перфорации стенки на несущую способность термопрофилей / В.А. Рыбаков, О.С. Гамаюнова, //Журнал для профессионалов «СтройПРОФИль», № 1(63). - Изд-во «Торговля и промышленность», 2008. С. 128-130

16. *Жмарин Е.Н.* ЛСТК – инструмент для реализации программы «Доступное и комфортное жилье»/ Е.Н. Жмарин, В.А. Рыбаков //Журнал для профессионалов «СтройПРОФИль», № 6(60); № 7(61). Изд-во «Торговля и промышленность», 2007. С. 118-119; С. 166-167

17. Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка: 80 000слов и фразеологических выражений/ Российская академия наук. Институт русского языка им. В.В. Виноградова. – 4-е изд., дополненное.— М.: Азбуковник, 1997. – 944 стр.

18. Куражова В.Г., Назмеева Т.В. Виды узловых соединений в легких стальных тонкостенных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 47-52

19. Катранов И.Г. Испытания и расчет винтовых соединений легких стальных тонкостенных конструкций на растяжение // Вестник МГСУ. 2010. № 2. С. 89-93.

20. Перельмутер, А. В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. - М. : СКАД СОФТ, 2010 - Т. 1 : Общие теоремы. Устойчивость отдельных элементов механических систем. - 2010. - XVIII, 681 с. : ил. - Библиогр.: с. 665-674 (146 назв.). Указ.: с. 675-681. - 500 экз. - ISBN 978-5-903683-08-6 : Б. ц.

Рыбаков Владимир Александрович

**ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ЛЕГКИХ
СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 953005 – учебная литература

Подписано к печати 2010. Формат 60x84/16. Печать цифровая
Усл. печ. л.13,0. Тираж 40. Заказ 8667b

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в
типографии Издательства Политехнического университета
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул.,29
Телефон: (812) 550-40-14
Факс: (812) 297-57-76